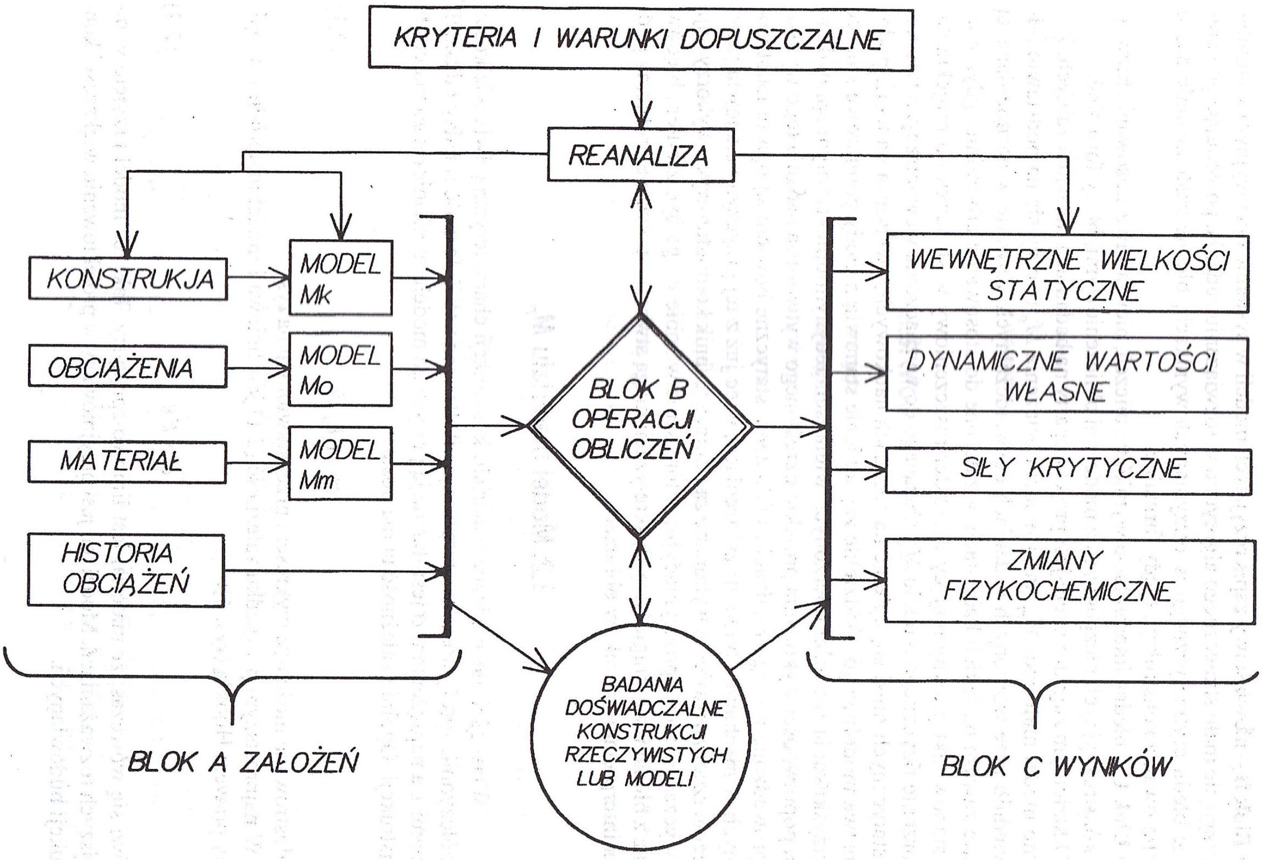
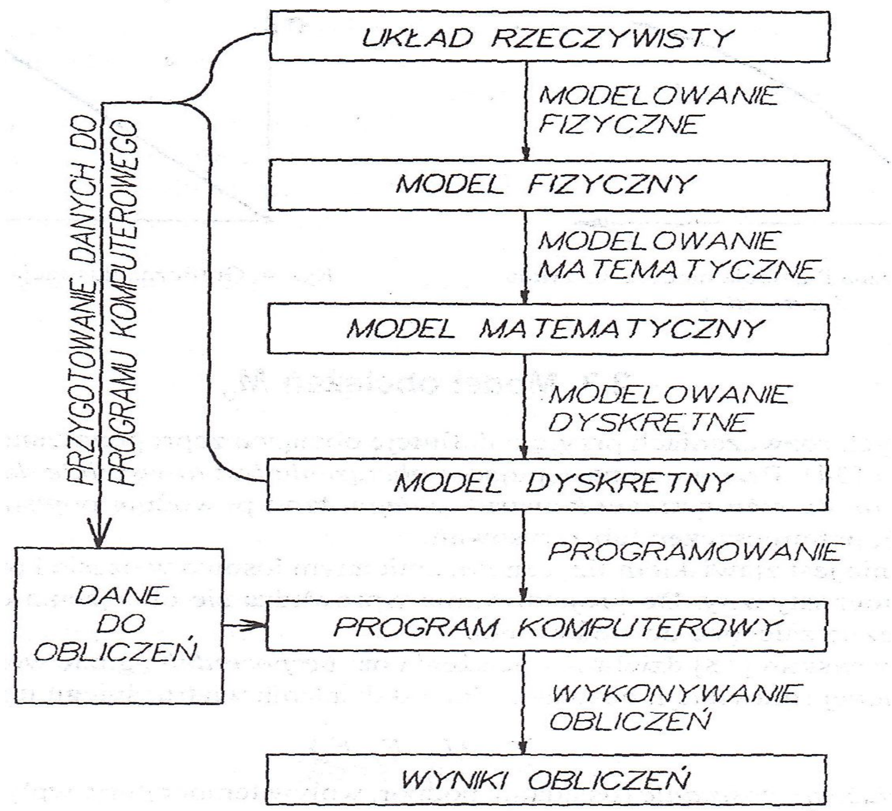
MODELOWANIE KOMPUTEROWE KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH

Istotnym elementem projektowania komputerowego jest stworzenie odpowiedniego modelu obliczeniowego konstrukcji.
Tworzenie i wykorzystanie takiego modelu przedstawia schemat blokowy



Podczas tworzenia modelu komputerowego konstrukcji istotnym jest zachowanie odpowiedniej adekwatności modelowej między rzeczywistą konstrukcją a spreparowanym modelem komputerowym. Przechodząc od rzeczywistej konstrukcji do modelu szczególną uwagę należy zwrócić na:

- adekwatną geometrię układu konstrukcyjnego
- sztywność poszczególnych elementów konstrukcyjnych, a niekiedy również i węzłów
- odpowiednie podparcie konstrukcji tak by nie stanowiła ona układu geometrycznie zmiennego
- odpowiednich schematów obciążeń i ich kombinatoryki



METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Metoda elementów skończonych **MES** (z ang. Finite Element Method) jest to obecnie jedna z najszerzej stosowanych metod rozwiązywania różnych problemów inżynierskich. Jej uniwersalność, polegającą na łatwości schematyzacji różnych obszarów o skomplikowanej geometrii, także niejednorodnych i anizotropowych, kwalifikuje ja jako dobre narzędzie do modelowania problemów fizycznych. Rozwój metody elementów skończonych przebiegał i nadal przebiega, równolegle z rozwojem techniki komputerowej. Pierwsze prace stosujące metodę elementów skończonych zostały opublikowane w latach czterdziestych ubiegłego wieku. Początkowo obliczenia przeprowadzane za pomocą metody elementów skończonych dotyczyły obiektów o bardzo prostych geometriach (najczęściej modelowanych jako jednowymiarowe) i stałych własnościach materiałowych oraz zjawisk opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi. Od lat siedemdziesiątych metodę elementów skończonych zaczęto stopniowo stosować do rozwiązywania problemów nieliniowych, ale dalej dla obiektów o stosunkowo prostych geometriach, modelowanych jako 1D lub 2D. Gwałtowny rozwój techniki komputerowej w latach osiemdziesiątych, związany z coraz większą mocą obliczeniowa komputerów oraz możliwością operowania i przechowywania bardzo dużych zbiorów informacji, umożliwił zastosowanie metody elementów skończonych do obliczeń problemów nieliniowych dla obiektów o dowolnie złożonych geometriach, szczególnie 3D.

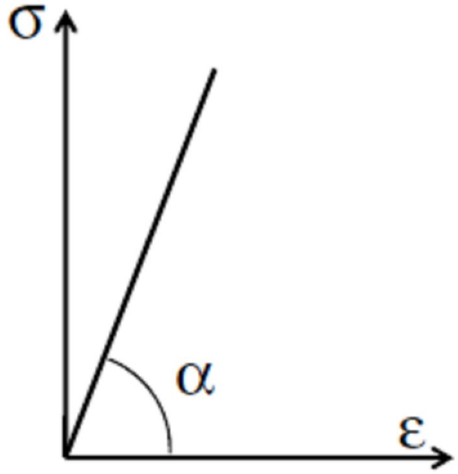
W zależności od stopnia skomplikowania dzieli się ona na dwie podstawowe metody:

- metodę sprężystą (często zwaną metodą liniową)

W tej metodzie zakłada się, że przemieszczenia konstrukcji wywołane obciążeniem są małe; dużo mniejsze od wymiarów konstrukcji. Również odkształcenia elementów są nieznaczne i często zaniedbywane.
Charakterystyki materiału przyjmowane w modelu ograniczają się do zakresu liniowo sprężystego (możliwe jest stosowanie prawa Hooke`a)

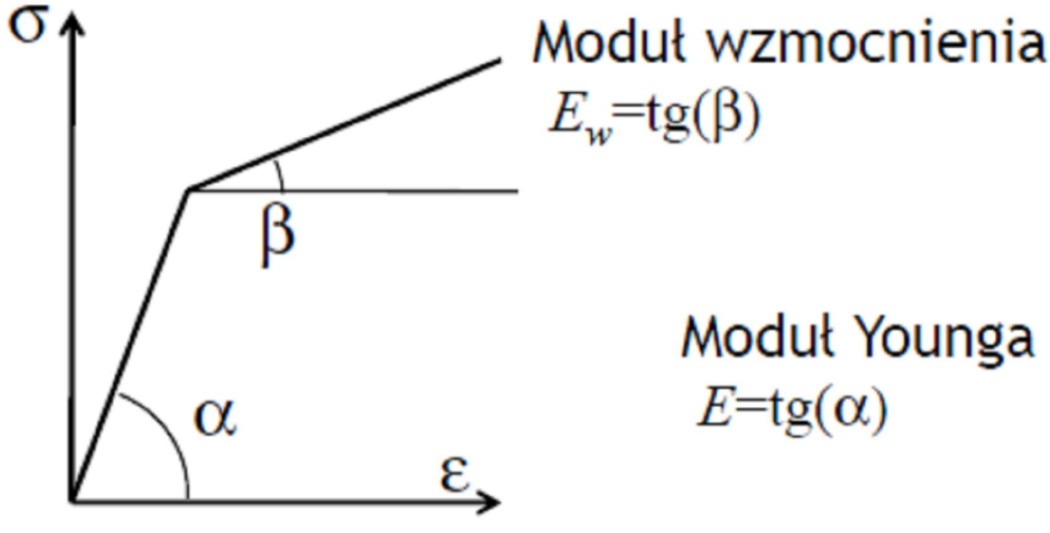
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

i przyjmuje się stały moduł Younga $E = tg\alpha$



- metoda plastyczna (metoda nieliniowa)

W tej metodzie zakłada się, że przemieszczenia konstrukcji mogą być dowolne (zwykle jednak są one ograniczone przez geometryczną niezmienność konstrukcji).
Charakterystyki materiału przyjmowane w modelu zazwyczaj nie są liniowe, a ich przebieg jest niemalże dowolny.



Przykład materiału nieliniowego

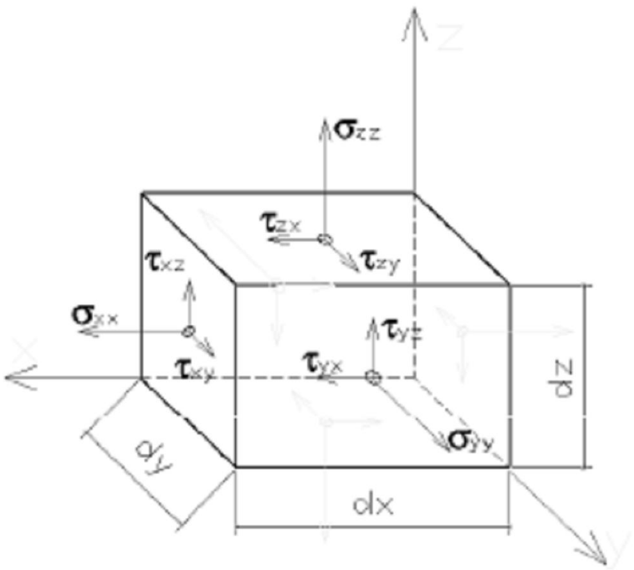
Obliczenia dla konstrukcji z nieliniowymi modelami są wykonywane w ten sam sposób jak dla układów z zakresu liniowo sprężystego, ale obciążenie jest dzielone na mniejsze wartości i przykładane dla odkształconej konstrukcji. W ten sposób każdy krok można traktować jako zagadnienie liniowo sprężyste.

Tensor naprężeń i tensor odkształceń.

Naprężenia, działające na element o nieskończenie małych wymiarach, zestawia się w macierz, która nosi nazwę tensora stanu naprężeń **σ** a wygląda w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Sens fizyczny tensora naprężeń ilustruje rysunek:



Naprężenia $\boldsymbol{\sigma_{ii}}$ i $\boldsymbol{\tau_{ij}}$ są nazywane składowymi tensora naprężeń. Powyższa macierz jest macierzą symetryczną czyli $\sigma = \sigma^T$ oraz $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Odkształcenia elementu o nieskończenie małych wymiarach, zestawia się także w macierz, która nosi nazwę tensora stanu odkształcenia **ε** i wygląda w następujący sposób:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Składowe tensorów naprężeń i odkształceń można zapisać w formie wektorów:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Ze względu na symetrię składowe tensora naprężeń może być przedstawiona jako wektor : a składowe odkształceń jako:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Odkształcenia jako pochodne przemieszczeń mogą być zapisane za pomocą wzorów:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

Równania konstytutywne

Równania wiążące składowe tensorów naprężenia i odkształcenia nazywają się równaniami konstytutywnymi Metody Elementów Skończonych i są zapisywane w postaci:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = D^{-1} \cdot \sigma$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Zestawienie odkształceń podłużnych w przestrzennym stanie naprężeń można zapisań za pomocą wzorów:

- naprężenia działające wzdłuż osi x

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{xx}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{xx}$$

- naprężenia działające wzdłuż osi y

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{yy}$$

- naprężenia działające wzdłuż osi z

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{zz}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{zz}$$

W przypadku odkształceń podłużnych, na podstawie badań stwierdzono zakres pracy materiału sprężystego, i w odniesieniu do którego można zapisać:

$$2\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad 2\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}; \qquad 2\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

W przypadku odkształceń postaciowych nie ma sprzężenia pomiędzy odkształceniami w stanie przestrzennym. Odkształcenia postaciowe ostateczne zależą tylko od naprężeń stycznych, działających w płaszczyźnie zmiany kąta odkształcenia postaciowego.

W równaniach konstytutywnych występują stałe materiałowe:
E – moduł Younga, moduł sprężystości podłużnej
G – moduł Kirchoffa, moduł sprężystości postaciowej
ν – współczynnik Poissona
Wszystkie powyższe parametry łączy zależność:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

W przypadku zapisu równań konstytutywnych za pomocą rachunku tensorowego dochodzą dwie stałe λ i μ, nazywane stałymi Lamego. Pomiędzy stałymi Lamego a wyżej wymienionymi stałymi istnieją zależności:

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \;;\; \mu = G$$

Zależność między naprężeniami i odkształceniami można napisać w formie równania macierzowego postaci :

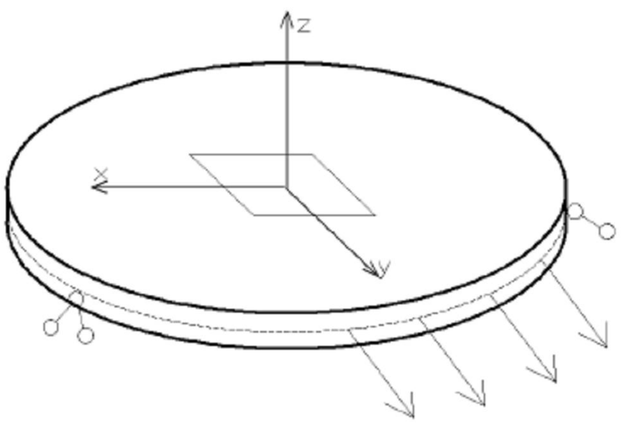
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

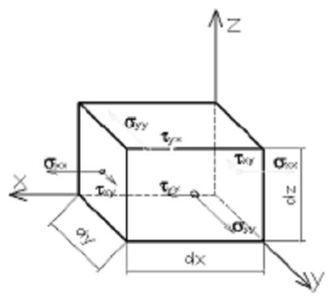
gdzie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Płaski stan naprężenia

Płaski element, którego grubość jest znacznie mniejsza od dwóch pozostałych, obciążony tylko w swojej płaszczyźnie nazywany jest tarczą. W takiej sytuacji na powierzchni elementu nie ma obciążeń, a więc nie ma naprężeń czyli naprężenia, które mają jeden z indeksów „z”, są równe zero. Taki stan naprężeń nazywany jest płaskim stanem naprężeń (PSN).





Tarcza obciążona tylko w swojej płaszczyźnie.

Założenie upraszczające, które można stosować np. w przypadku cienkich tarcz.

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = 0$$

Otrzymujemy następujące składowe tensora odkształcenia:

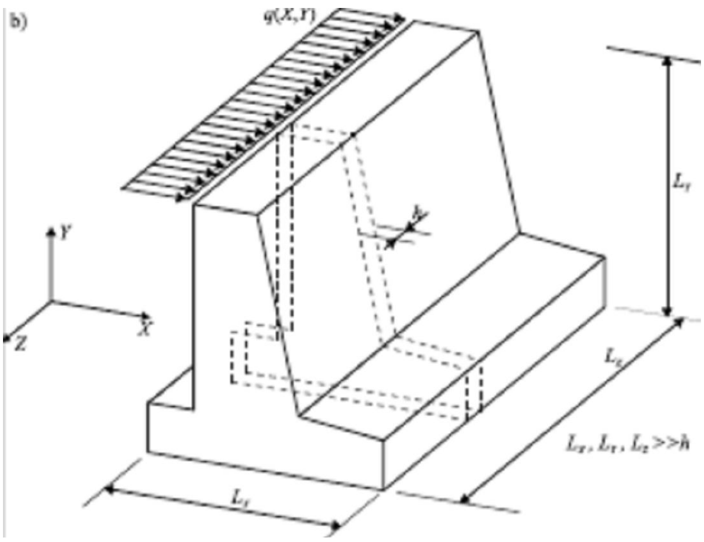
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right), \qquad \gamma_{zx} = 0; \quad \gamma_{zy} = 0$$

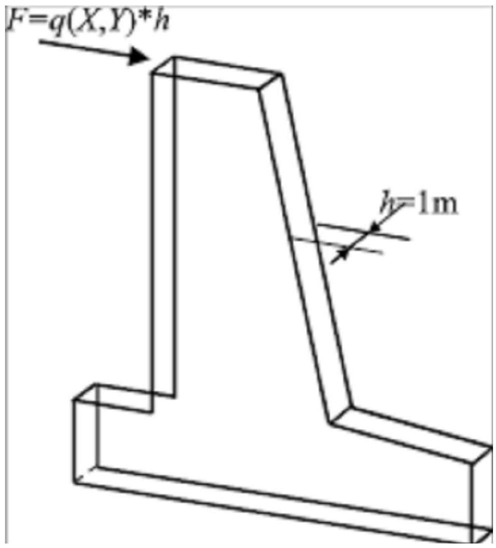
Zredukowane wektory naprężeń i odkształceń mają postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Płaski stan odkształcenia

W przypadku budowli, których wymiary są we wszystkich kierunkach podobne, można wyciąć płaski element. Na ten płaski element działają pozostałe części bryły, które nie pozwalają na odkształcenia w kierunku prostopadłym do tarczy. W takiej sytuacji na powierzchni elementu odkształcenia są równe zero. Taki stan naprężeń nazywany jest płaskim stanem odkształceń (PSO).





Założenie upraszczające, które można stosować w przypadku płaskich przekrojów masywnych obiektów:

$$\varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{zx} = 0; \quad \gamma_{zy} = 0$$

Otrzymujemy następujące składowe tensora odkształcenia:

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right), \quad \tau_{zx} = 0; \quad \tau_{zy} = 0$$

Zredukowane wektory naprężeń i odkształceń mają postać:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^{-1} = \frac{1-\nu^2}{E}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{-\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix}$$

Równania równowagi:

Z warunków równowagi wynika, że suma sił i momentów w układzie musi być równa zero.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i = 0$$

W postaci skalarnej zapis warunków równowagi, dla ciała sztywnego przybiera postać:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{Xi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} P_{Yi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} P_{Zi} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Xi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{Yi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{Zi} = 0$$

W przypadku płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia składowe naprężeń się zerują i warunki równowagi sprowadzają się do postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{Xi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} P_{Yi} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{Zi} = 0$$

W analizie układu konstrukcyjnego rozróżniamy dwa podstawowe typy elementów dla których prowadzimy analizę konstrukcji:

- Ciało doskonale sztywne (idealizacja):
  Brak zmian odległości punktów ciała pod działaniem obciążeń.
- Ciało odkształcalne:
  Odkształcenia ciała są na tyle duże, że nie jest możliwe pominięcie odkształceń ciała w analizie, bez istotnej utraty dokładności obliczeń.

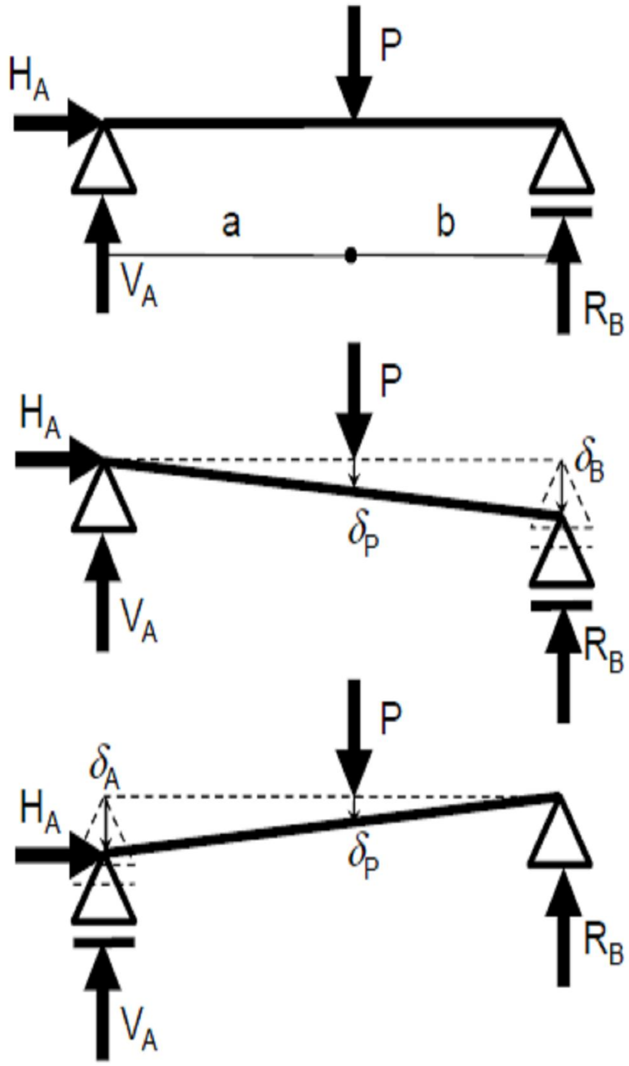
Zasada prac wirtualnych

W przypadku ciała sztywnego, praca wykonywana na przemieszczeniach wirtualnych przez siły zewnętrzne (obciążenia, reakcje) równa jest 0.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \overline{u}_i = 0$$

Przemieszczenie wirtualne powinno spełniać następujące warunki:

- dowolne, niezależne od sił działających na bryłę,
- zgodne z więzami (kinematycznie dopuszczalne),
- niezależne od czasu.



$$P \cdot \delta_{\mathrm{P}} - R_B \cdot \delta_{\mathrm{B}} = 0$$

$$\frac{\delta_{\mathrm{P}}}{a} = \frac{\delta_{\mathrm{B}}}{a+b}$$

$$R_B = P \cdot \frac{\delta_{\mathrm{P}}}{\delta_{\mathrm{B}}} = P \cdot \frac{a}{(a+b)}$$

$$P \cdot \delta_{\mathrm{P}} - V_A \cdot \delta_{\mathrm{A}} = 0$$

$$\frac{\delta_{\mathrm{P}}}{b} = \frac{\delta_{\mathrm{A}}}{a+b}$$

$$V_A = P \cdot \frac{\delta_{\mathrm{P}}}{\delta_{\mathrm{A}}} = P \cdot \frac{b}{(a+b)}$$

W przypadku ciała odkształcalnego, wzrost energii potencjalnej ciała, znajdującego się w równowadze, jest równy pracy sił zewnętrznych wykonanych na przemieszczeniach wirtualnych.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \overline{u}_i = E_\sigma$$

Przemieszczenie wirtualne powinno spełniać następujące warunki:

- dowolne, niezależne od sił działających na bryłę,
- zgodne z więzami (kinematycznie dopuszczalne),
- niezależne od czasu.

Wzrost energii potencjalnej jest równy pracy wykonywanej przez siły wewnętrzne na przemieszczeniach wirtualnych.

$$E_\sigma = \int_V \sigma^{\mathrm{T}} \overline{\varepsilon} dV$$

Na podstawie **twierdzenia Clapeyrona** możemy stwierdzić, że dla układu sprężystego, znajdującego się w równowadze, praca sił zewnętrznych L_z równa jest energii potencjalnej sił wewnętrznych (energii sprężystej):

$$\boldsymbol{L_z = V}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \overline{u}_i = \frac{1}{2}\int_V \sigma^T \varepsilon dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon^T \sigma dV$$

lub nieco w innej wersji;
Praca sił zewnętrznych jest miarą energii potencjalnej obciążenia zewnętrznego przekształcającej się w energię sprężystą:

$$\boldsymbol{L_z = V_z = V = L_w}$$

Założenia przyjęte w twierdzeniu Clapeyrona opisują układ konstrukcyjny jako spełniający warunki:

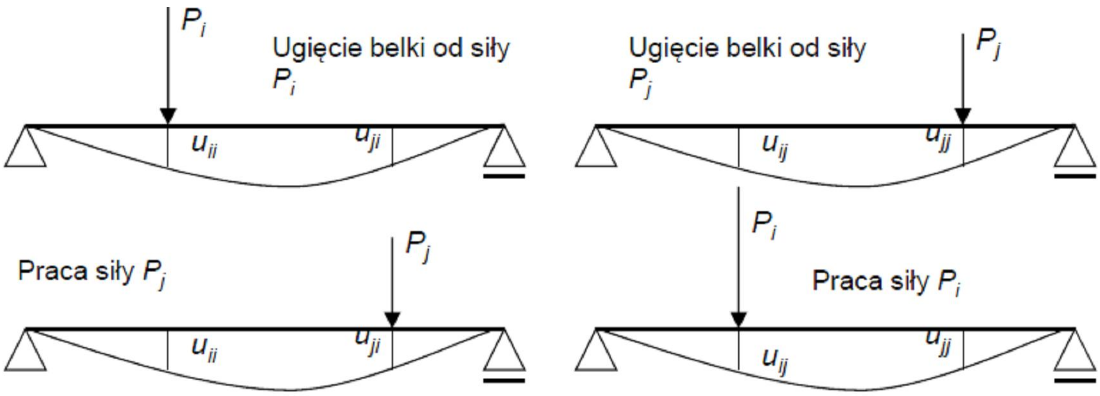
- materiał zachowuje się zgodnie z prawem Hooke’a,
- nie ma takich warunków brzegowych, których istnienie zależy od odkształcenia konstrukcji,
- temperatura układu jest stała,
- nie ma naprężeń i odkształceń wstępnych.

Układ sił $\mathbf{P}_{ik}$ wykonuje taką samą pracę na przemieszczeniach wywołanych układem sił $\mathbf{P}_{jn}$ jak układ sił $\mathbf{P}_{jn}$ na przemieszczeniach wywołanych przez siły $\mathbf{P}_{ik}$. Twierdzenie to nosi nazwę twierdzenia o wzajemności prac wirtualnych i popularnie jest nazywane **twierdzeniem Bettiego**.

Matematyczny opis tego twierdzenia wygląda następująco:

$$\sum_k \mathbf{P}_{ik} \cdot \mathbf{u}_{jk} = \sum_n \mathbf{P}_{jn} \cdot \mathbf{u}_{in}$$

$$\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{u}_i$$

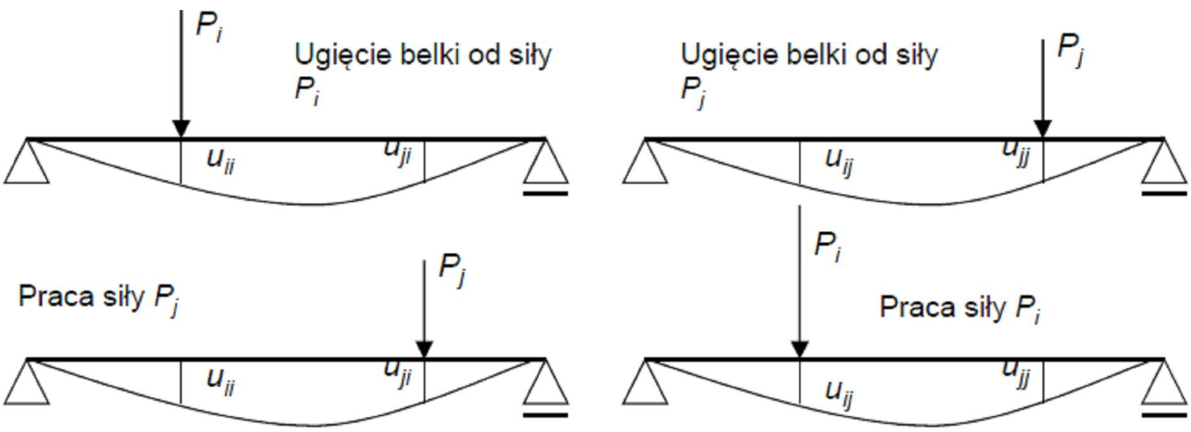


$$\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{u}_{ji} \qquad = \qquad \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$$

Twierdzenie Maxwella

Jeżeli na konstrukcję działają dwie niezależne uogólnione siły jednostkowe $P_i = 1$ i $P_j = 1$, wywołujące odpowiednio przemieszczenia w_{ji} (przemieszczenie w punkcie j na kierunku siły P_j wywołane siłą P_i) i w_{ij} (przemieszczenie w punkcie i na kierunku siły P_i wywołane siłą P_j), to te przemieszczenia są sobie równe.

$$P_i\, w_{ij} = P_j\, w_{ji} \text{ oraz } P_i{=}1 \text{ i } P_j{=}1 \Rightarrow w_{ij} = w_{ji}$$



$$\mathbf{P}_j \cdot \mathbf{u}_{ji} \qquad = \qquad \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{u}_{ij}$$

Tryb postępowania przy analizie konstrukcji metodą elementów skończonych:

1. Analizowany obszar dzieli się myślowo na pewna skończoną liczbę geometrycznie prostych elementów, tzw. elementów skończonych.
2. Zakłada się, że te elementy połączone są ze sobą w skończonej liczbie punktów znajdujących się na obwodach. Najczęściej są to punkty narożne. Noszą one nazwę węzłów. Poszukiwane wartości wielkości fizycznych stanowią podstawowy układ niewiadomych.
3. Obiera się pewne funkcje jednoznacznie określające rozkład analizowanej wielkości fizycznej wewnątrz elementów skończonych, w zależności od wartości tych wielkości fizycznych w węzłach. Funkcje te noszą nazwę funkcji węzłowych lub funkcji kształtu.
4. Równania różniczkowe opisujące badane zjawisko przekształca się, poprzez zastosowanie tzw. funkcji wagowych, do równań metody elementów skończonych. Są to równania algebraiczne.
5. Na podstawie równań metody elementów skończonych przeprowadza się asemblacje układu równań, tzn. oblicza się wartości współczynników stojących przy niewiadomych oraz odpowiadające im wartości prawych stron. Jeżeli rozwiązywane zadanie jest niestacjonarne, to w obliczaniu wartości prawych stron wykorzystuje się dodatkowo warunki początkowe. Liczba równań w układzie jest równa liczbie węzłów przemnożonych przez liczbę stopni swobody węzłów, tzn. liczbę niewiadomych występujących w pojedynczym węźle.
6. Do tak utworzonego układu równań wprowadza się warunki brzegowe. Wprowadzenie tych warunków następuje poprzez wykonanie odpowiednich modyfikacji macierzy współczynników układu równań oraz wektora prawych stron.
7. Rozwiązuje się układ równań otrzymując wartości poszukiwanych wielkości fizycznych w węzłach.
8. W zależności od typu rozwiązywanego problemu, lub potrzeb, oblicza się dodatkowe wielkości.
9. Jeżeli zadanie jest niestacjonarne (nieliniowe), to czynności opisane w pkt. 5, 6, 7 i 8 powtarza się aż do momentu spełnienia warunku zakończenia obliczeń. Może to być np. określona wartość wielkości fizycznej w którymś z węzłów, czas przebiegu zjawiska lub jakiś inny parametr.