DYSKRETYZACJA KONSTRUKCJI

Do wyznaczania wewnętrznych sił i odkształceń za pomocą techniki komputerowej służy aproksymacyjna metoda elementów skończonych. Istota jej sprowadza się do podziału (dyskretyzacji) całej konstrukcji na elementy zwane elementami skończonymi, które aproksymują rozpatrywaną konstrukcję.

Elementom nadaje się określone cechy geometryczne, fizyczne i mechaniczne tworząc w ten sposób komputerowy (analityczny) model konstrukcji.

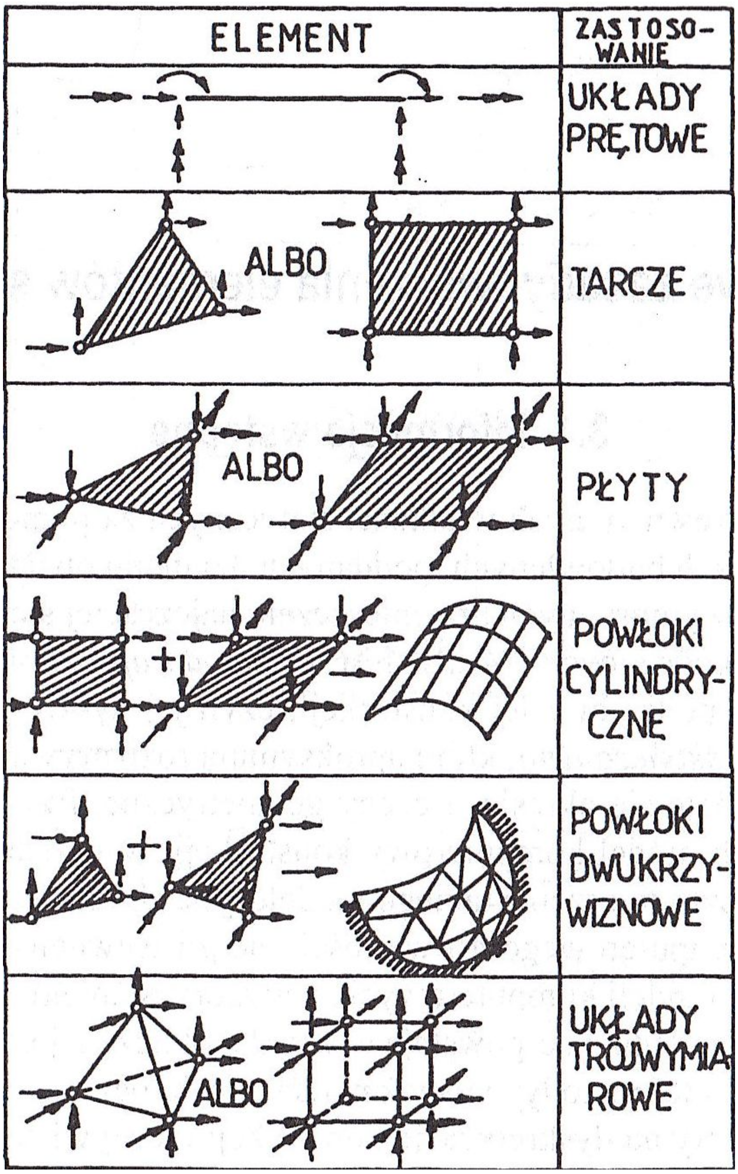
Konstrukcję dzieli się na elementy skończone za pomocą

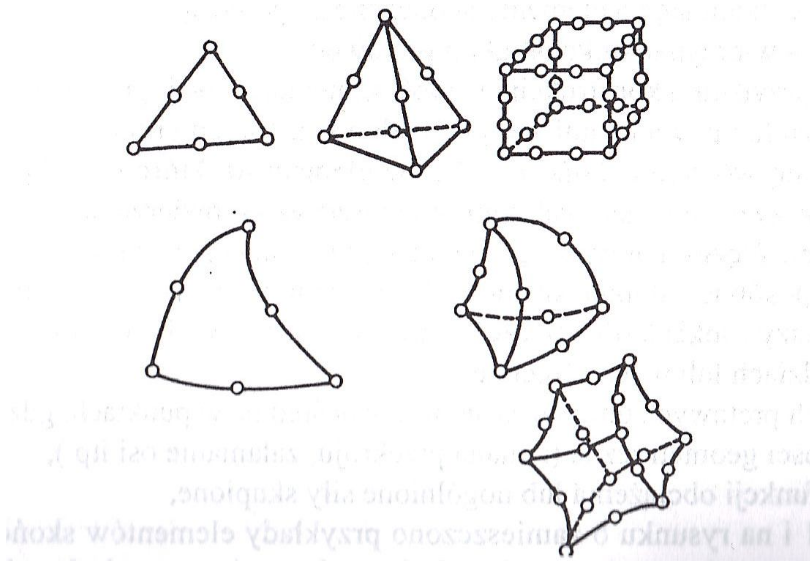
punktów – w przypadku konstrukcji prętowych

linii – w przypadku konstrukcji cienkościennych tarczowych, płytowych i powłokowych

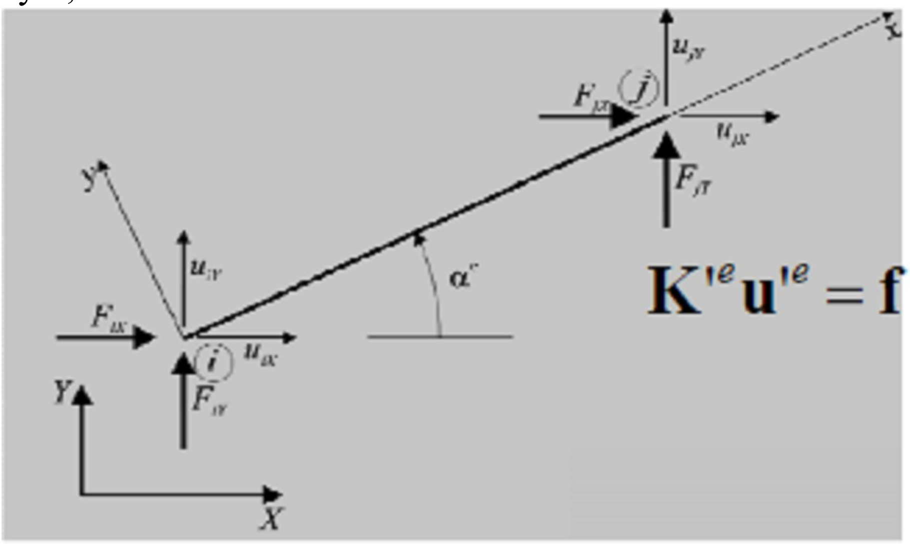
płaszczyzn lub powierzchni – w przypadku konstrukcji bryłowych

Uzyskuje się wówczas skończoną liczbę elementów połączonych jedynie w węzłach. Węzłom przypisuje się stopnie swobody w postaci przemieszczeń i obrotów.

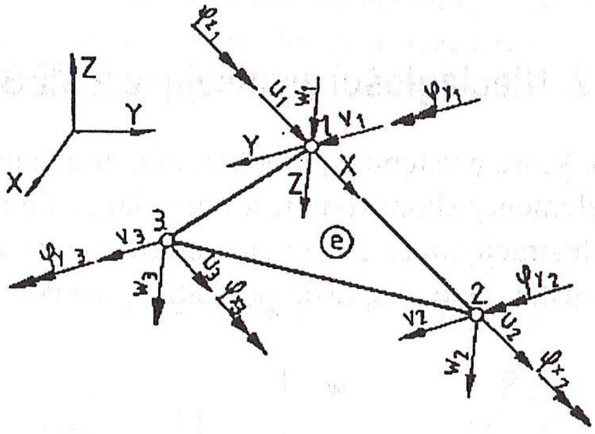


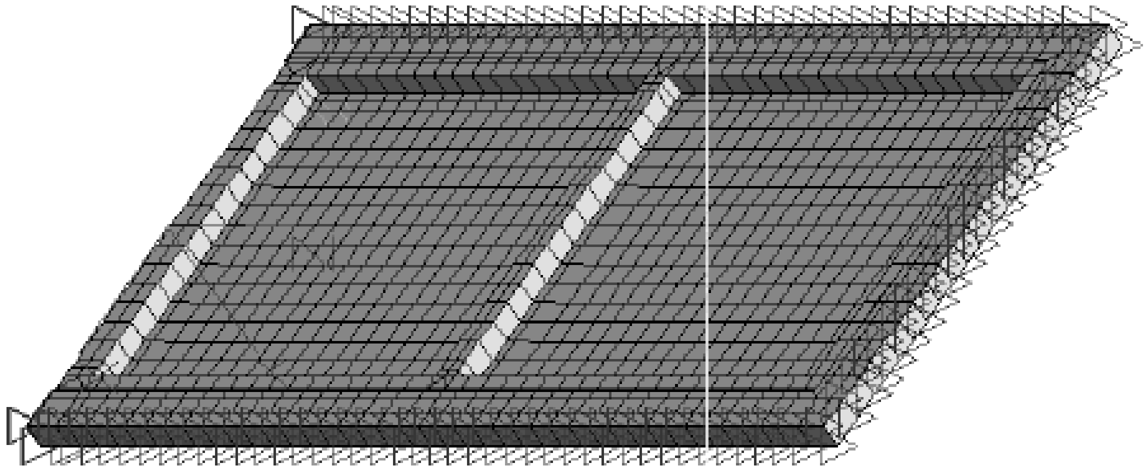


Konstrukcje prętowe: kratowe i ramowe
• Często podział naturalny – odcinek prostoliniowy pręta jest elementem skończonym;

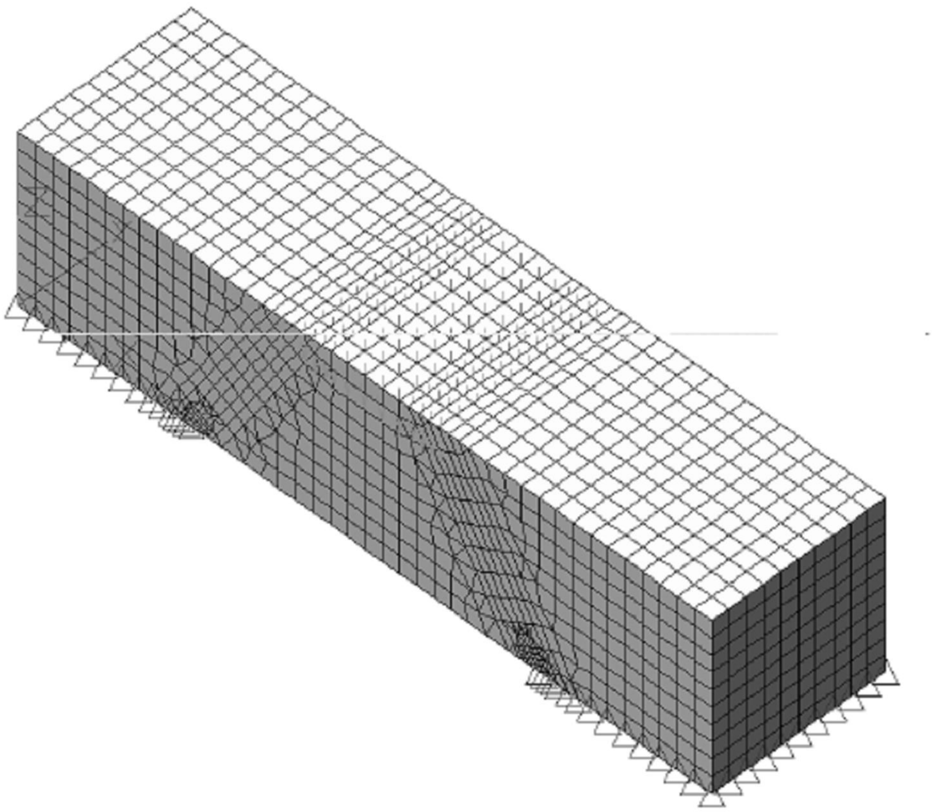


Konstrukcje płaskie i cienkościenne; tarcze, płyty i powłoki:
• Elementy prostokątne lub trójkątne;





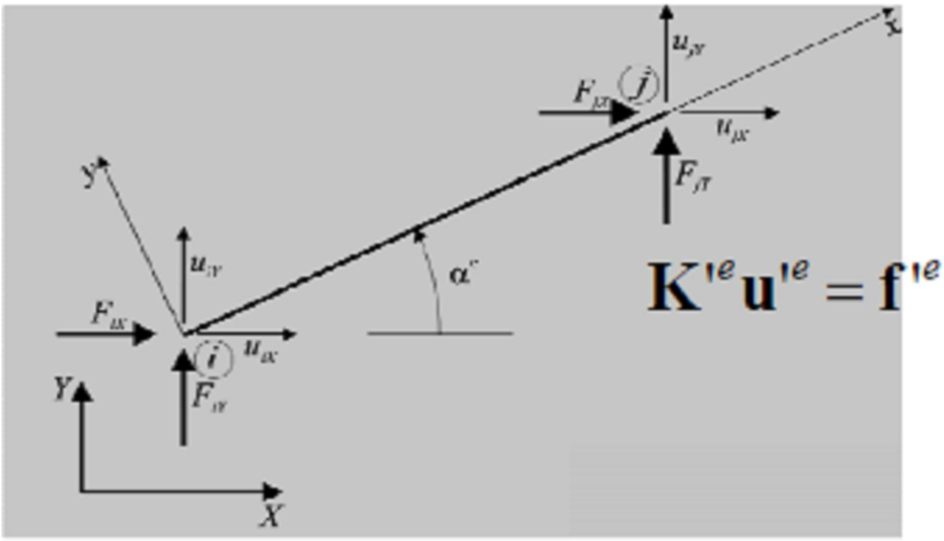
Konstrukcje bryłowe:
Elementy czterowęzłowe (czworościenne), sześciowęzłowe, ośmiowęzłowe.



MACIERZE SZTYWNOŚCI ELEMENTÓW

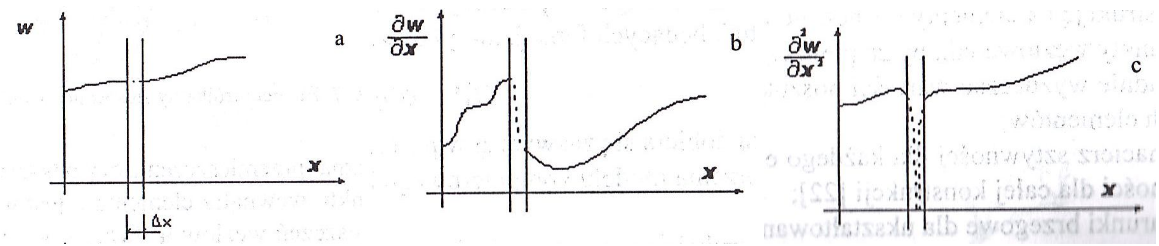
Aby stworzyć macierz sztywności konstrukcji musimy zacząć od analizy poszczególnych elementów. Analiza ta polega na:

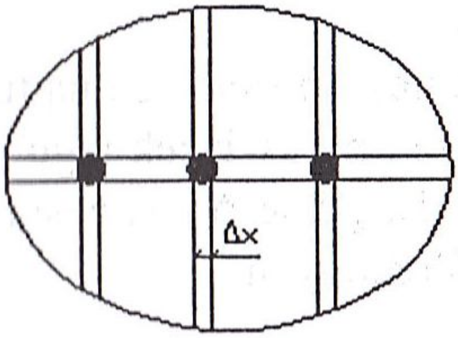
- ustaleniu ilości stopni swobody przypisanych do elementu skończonego i cech materiałowych związanych z zachowaniem się elementu,
- znalezieniu związków między parametrami statycznymi (obciążeniami) i odpowiadającymi im parametrami geometrycznymi (przemieszczeniami).
- przyjęciu odpowiednich warunków brzegowych dla elementu.

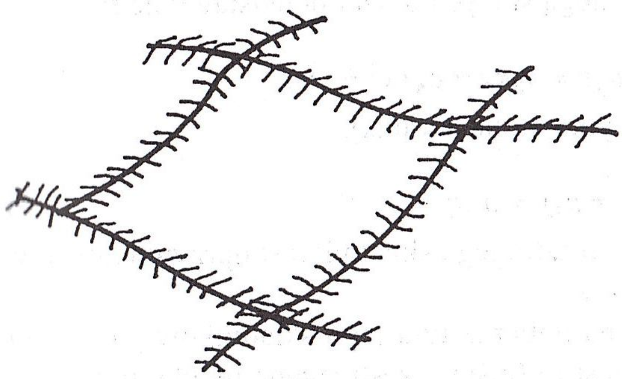


$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix}$$

Istotnym zjawiskiem przy dyskretyzacji konstrukcji na elementy skończone jest pojawienie się nieciągłości na liniach styku elementów.







STOPNIE SWOBODY ELEMENTÓW

Rodzaj konstrukcji	Ilość stopni swobody	Przesunięcia			Obroty		
	N_D	u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
krata płaska	2	•	•				
krata przestrzenna	3	•	•	•			
rama płaska	3	•	•				•
rama przestrzenna	6	•	•	•	•	•	•
ruszt	3			•	•	•	
tarcza	2	•	•				
płyta	3			•	•	•	
powłoka	6	•	•	•	•	•	•
bryła	3	•	•	•			

Liczba stopni swobody dla elementu określa ilość równań jaka musimy ułożyć, żeby określić odkształcenia, przemieszczenia, a zarazem naprężenia w konstrukcji

Zazwyczaj im więcej równań opisuje daną konstrukcję, to otrzymane wyniki są dokładniejsze, ale ich czas się wydłuża.

Układ równań metody elementów wygląda w następujący sposób:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{p} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1n} & \cdots & \mathbf{K}_{1N_n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2n} & \cdots & \mathbf{K}_{1N_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{K}_{n2} & \cdots & \mathbf{K}_{nn} & \cdots & \mathbf{K}_{1N_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N_n1} & \mathbf{K}_{N_n1} & \cdots & \mathbf{K}_{N_n1} & \cdots & \mathbf{K}_{N_nN_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{N_n} \end{bmatrix}$$

Jako wynik otrzymujemy przemieszczenia w węzłach (na poszczególnych stopniach swobody). Na ich podstawie wyliczane są siły odkształcenia i naprężenia a następnie siły wewnętrzne, reakcje, itp.

FUNKCJE APROKSYMUJĄCE

Do wyznaczenia przemieszczeń wewnątrz elementu na podstawie przemieszczeń węzłów służy funkcja kształtu
Funkcje kształtu dla zagadnień dwu- lub trójwymiarowych mogą być utworzone za pomocą:

- Dwu lub trójwymiarowych ciągów Pascala
- Wielomianów Lagrange`a
- Wielomianów Hermite`a
- Wielomianów Serenpida

Wielomiany Serenpida są ulepszeniem wielomianów Lagrange`a.

Ogólnie zasadę aproksymacji funkcją kształtu można zapisać w postaci:

$$\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{N}^e(x,y)\,\mathbf{u}^e$$

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i(x,y) & \mathbf{N}_j(x,y) & \mathbf{N}_k(x,y) & \mathbf{N}_l(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \\ \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix}$$

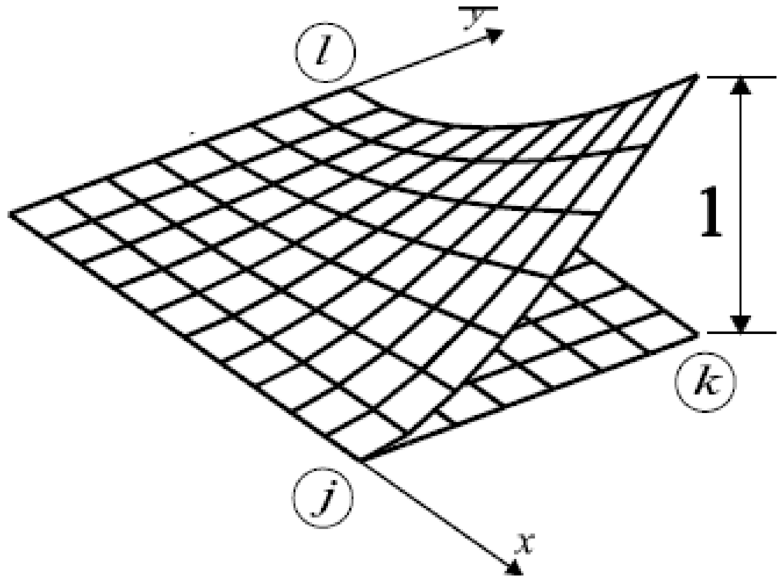
Na podstawie funkcji przemieszczeń liczone są odkształcenia

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

i na tej podstawie naprężenia

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon$$



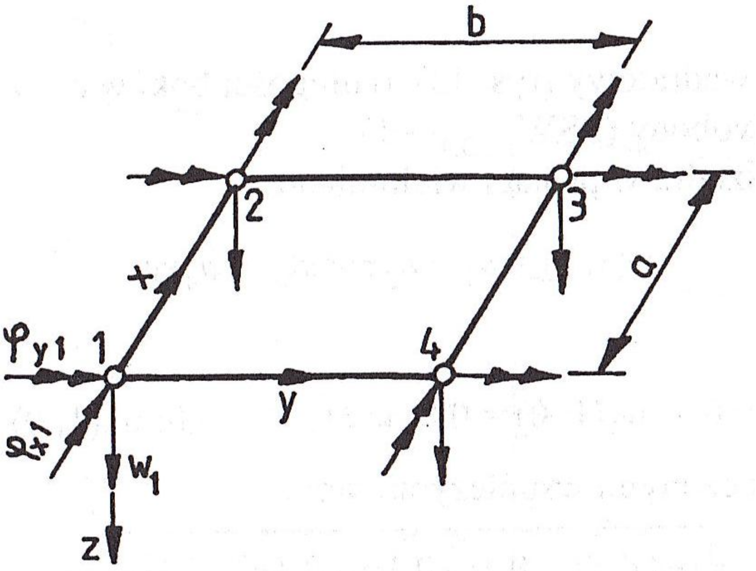
Funkcje Pascala

Dla zadania dwuwymiarowego tworzenie wielomianu może być wykonane za pomocą tzw. trójkąta Pascala

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \quad y \\ x^2 \quad xy \quad y^2 \\ x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Funkcje te tworzy się w taki sposób aby opisywały pole przemieszczeń wewnątrz elementu niezależnie od orientacji przyjmowanych układów współrzędnych, oraz nie zawierały składników uprzywilejowanych, czyli o różnych stopniach faworyzujących jeden kierunek

Dla przykładu:
Dla elementu płytowego o czterech identycznych bokach równych jedności.



Element ten posiada pięć węzłów 1,2,3,4,5. Węzeł 5 znajduje się w środku elementu. Wszystkie węzły posiadają po jednym stopniu swobody ($SSW_{1,2,3,4,5} =1$)

Przyjęta funkcja kształtu ma postać wielomianu o wzorze:

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 \left(x^2 + y^2\right)$$

Ustalając warunki brzegowe:
$w_1(0;0) = 0{,}1$; $w_2(1;0) = 0{,}0$; $w_3(1;1) = 0{,}0$; $w_4(0;1) = 0{,}0$; $w_5(0{,}5;0{,}5) = 0{,}1$

Układ równań będzie miał postać:

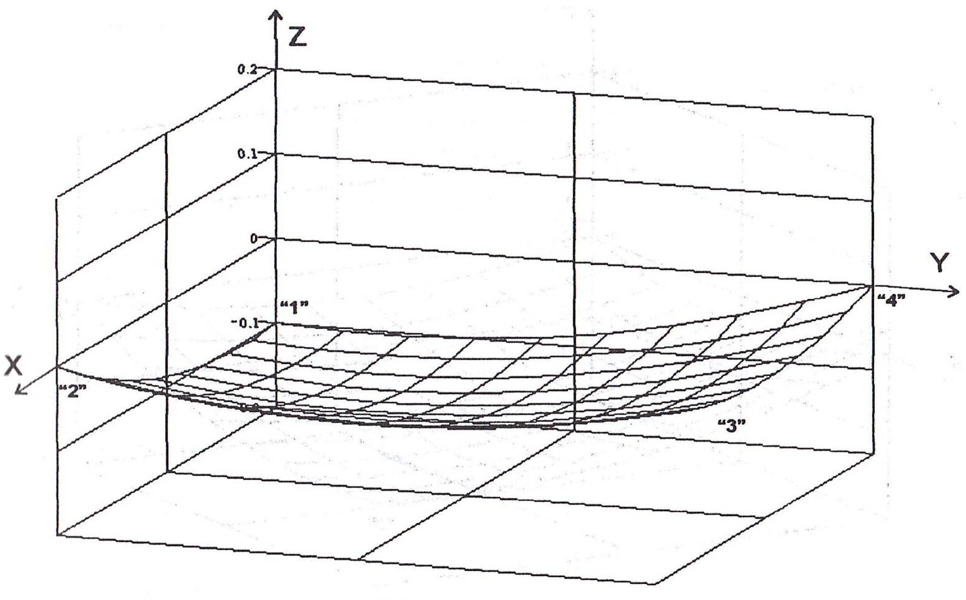
1. $a_1 = 0{,}1$
2. $0{,}1 + a_2 + a_5 = 0$
3. $0{,}1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2\,a_5 = 0$
4. $0{,}1 + a_3 + a_5 = 0$
5. $0{,}1 + 0{,}5\,a_2 + 0{,}5\,a_3 + 0{,}25\,a_4 + 0{,}5\,a_5 = 0{,}1$

Stąd po rozwiązaniu układu równań otrzymamy
$a_1 = 0{,}1$; $a_2 = 0{,}05$; $a_3 = 0{,}05$; $a_4 = 0{,}1$; $a_5 = -0{,}15$

Stąd wielomian aproksymujący otrzymany według funkcji Pascala ma postać:

$$w(x, y) = 0{,}1 + 0{,}05x + 0{,}05y + 0{,}1xy - 0{,}15\left(x^2 + y^2\right)$$

A graficzne przedstawienie otrzymanych zależności:



Funkcja Lagrange`a

Ogólna postać wielomianów Lagrange`a przedstawia się następująco:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1}^{m} \frac{x - x_i}{x_i - x_j} \quad \text{dla } j \neq i$$

W przypadku prostych siatek podziału dla elementów dwuwęzłowych (m=2) i współrzędnej bezwymiarowej $\xi = \frac{x}{l}$ przy długości elementu l otrzymuje się:

i: $\xi_1 = -0{,}5$; $\xi_2 = +0{,}5$

j: $\xi_1 = -0{,}5$; $\xi_2 = +0{,}5$

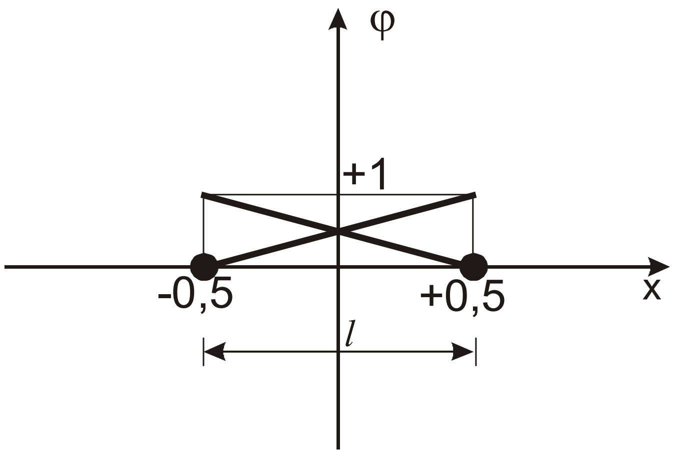
Stąd dla węzła 1 otrzymujemy funkcję aproksymującą w postaci:

$\phi_1 = \frac{\xi + 0{,}5}{-0{,}5 + 0{,}5} \cdot \frac{\xi - 0{,}5}{-0{,}5 - 0{,}5} = 0{,}5 - \xi$ - pierwszy czynnik wielomianu pomija się bo $i=j$.

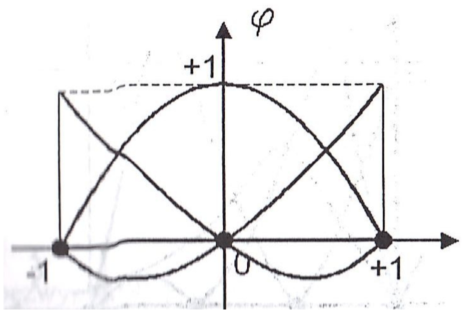
Dla węzła 2 otrzymujemy funkcję aproksymującą w postaci:

$\phi_2 = \frac{\xi + 0{,}5}{0{,}5 + 0{,}5} \cdot \frac{\xi - 0{,}5}{0{,}5 - 0{,}5} = 0{,}5 + \xi$ - drugi czynnik wielomianu pomija się bo $i=j$.

Funkcja kształtu dla takiego elementu ma postać graficzną:



Dla większej ilości węzłów kształt funkcji aproksymujących się zmienia i na przykład dla trzech węzłów ma postać:



Funkcja Hermite`a

Ogólna postać wielomianu Hermite`a można przedstawić za pomocą wzoru

$$H_{mi}^{n}$$

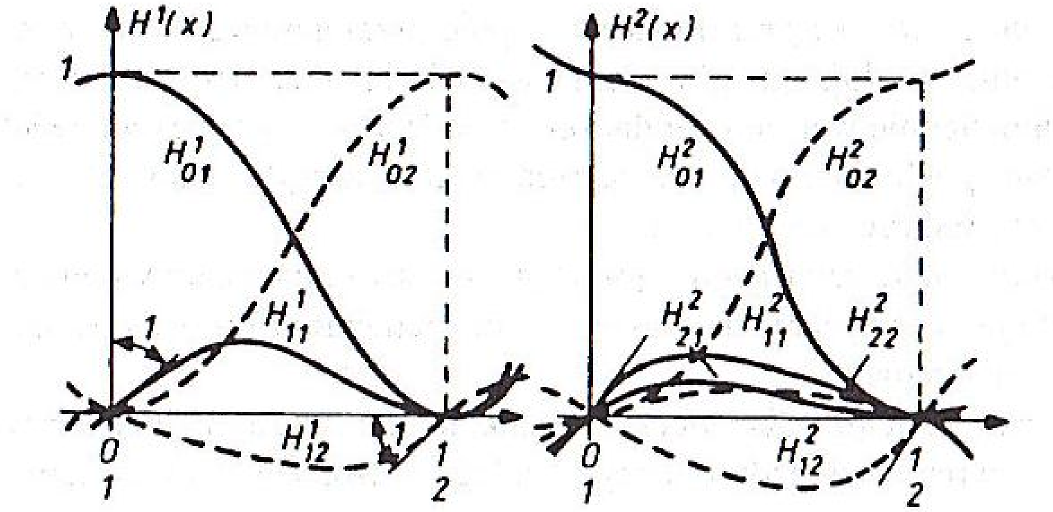
gdzie: n – rząd wielomianu, którego stopień wynosi 2n+1.
i – numer skrajnego punktu przedziału x,
m – rząd pochodnej wchodzącej do opisu funkcji.

$H_{01}^{1} = 1 - 3\xi^{2} + 2\xi^{3}$ - dla jednostkowego przemieszczenia w pkt. 1,

$H_{12}^{1} = (x_2 - x_1)\xi(\xi - 1)^2$ - dla jednostkowego kąta obrotu w pkt. 1,

$H_{02}^{1} = \xi^{2}(3 - 2\xi)$ - dla jednostkowego przemieszczenia w pkt. 2,

$H_{21}^{1} = (x_2 - x_1)\xi^{2}(\xi - 1)$ - dla jednostkowego kąta obrotu w pkt. 2,



MODELE KOMPUTEROWE KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH