

MODELE KOMPUTEROWE KONSTRUKCJI TARCZOWYCH PŁYTOWYCH I POWŁOKOWYCH

Konstrukcje tarczowe

Tworzenie elementów w ustrojach tarczowych nie jest tak trudne jak w płytach czy konstrukcjach powłokowych. Wynika to z faktu, że obciążenia działają w płaszczyźnie środkowej elementów i dlatego występują tu proste związki geometryczne pomiędzy naprężeniem i odkształceniem.

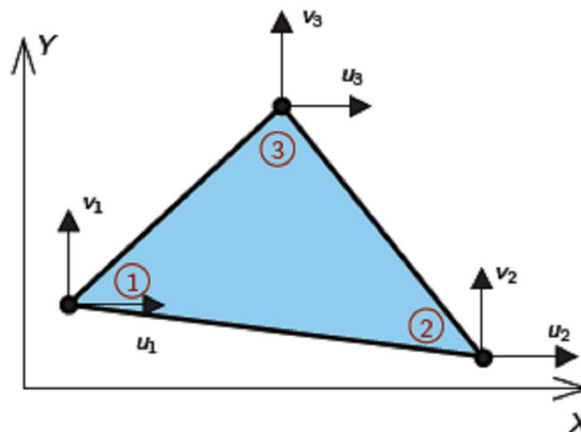
W elementach tych nie występują również problemy ze zsyciem sąsiednich elementów, natomiast główna trudność numeryczna polega na dokładności aproksymacji wyników obliczeń i przybliżenia ich do wyniku ścisłego z jednoczesną optymalizacją układów równań, by jak najmniej absorbował moc komputera.

Najprostszym przykładem elementu tarczowego jest element zwany CST (*Constant Strain Triangle*)

Liczba stopni swobody węzła: $LSSW = 2$

Liczba węzłów elementu: $LWE = 3$

Liczba stopni swobody elementu: $LSSE = LSSW \cdot LWE = 6$



Wielomian aproksymacyjny opisujący przemieszczenia u i v opiera się na bilingowych funkcjach postaci :

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad i \quad v = a_4 + a_5 x + a_6 y$$

Stałe w równaniach uzyskuje się poprzez rozwiązanie równań dla trzech węzłów:

$$u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 \quad v_1 = a_4 + a_5 x_1 + a_6 y_1$$

$$u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 \quad v_2 = a_4 + a_5 x_2 + a_6 y_2$$

$$u_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 \quad v_3 = a_4 + a_5 x_3 + a_6 y_3$$

stąd funkcje kształtu uzyskują postać:

$$u = \frac{1}{2\Delta} [(A_1 + B_1 x + C_1 y)u_1 + (A_2 + B_2 x + C_2 y)u_2 + (A_3 + B_3 x + C_3 y)u_3]$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} [(A_1 + B_1 x + C_1 y)v_1 + (A_2 + B_2 x + C_2 y)v_2 + (A_3 + B_3 x + C_3 y)v_3]$$

gdzie Δ jest powierzchnią trójkąta, a

$$\begin{aligned} A_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & A_2 &= x_1 y_3 - x_3 y_1 & A_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ B_1 &= y_2 - y_3 = y_{23} & B_2 &= y_1 - y_3 = y_{13} & B_3 &= y_1 - y_2 = y_{12} \\ C_1 &= x_3 - x_2 = x_{32} & C_2 &= x_3 - x_1 = x_{31} & C_3 &= x_2 - x_1 = x_{21} \end{aligned}$$

Uogólnione odkształcenia wewnątrz elementu można zapisać w postaci:

$$\{\varepsilon\}^e = \phi^e \{q\}^e = [I\phi_1, I\phi_2, I\phi_3] \{q\}^e$$

gdzie I jest macierzą jednostkową 2x2, a

$$\phi_1 = \frac{A_1 + B_1 x + C_1 y}{2\Delta} \quad \phi_2 = \frac{A_2 + B_2 x + C_2 y}{2\Delta} \quad \phi_3 = \frac{A_3 + B_3 x + C_3 y}{2\Delta}$$

2Δ jest wyznacznikiem macierzy $2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$

W przypadku elementu o stałej grubości t, macierz sztywności tego typu elementu ma postać:

$$k^e = (B^T D B)^e t \Delta$$

Przy czym macierz sprężystości D zależy od stanu w jakim znajduje się konstrukcja
- w płaskim stanie naprężenia

$$\sigma_z = 0, \quad D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

- w płaskim stanie odkształcenia

$$\sigma_z \neq 0 \quad \varepsilon_z = 0, \quad D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Macierz B ma postać:

$$B = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} B_1 & 0 & B_2 & 0 & B_3 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 & C_3 \\ C_1 & B_1 & C_2 & B_1 & C_3 & B_3 \end{bmatrix}$$

Uogólnione odkształcenia wewnętrzne można powiązać z przemieszczeniami węzłów w postaci:

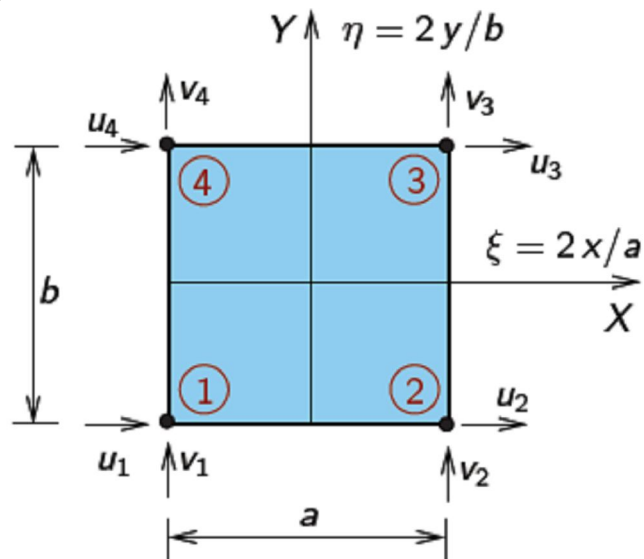
$$\{\varepsilon\}^e = B^e \{q\}^e$$

Innym często stosowanym przykładem elementu tarczowego jest element zwany Q4 (*prostokątny element 4-ro węzłowy*)

Liczba stopni swobody węzła: $LSSW = 2$

Liczba węzłów elementu: $LWE = 4$

Liczba stopni swobody elementu: $LSSE = LSSW \cdot LWE = 8$



Wektory przemieszczeń węzła i elementu:

$$\mathbf{q}_w = \{u_w; v_w\}^T$$

$$\mathbf{q}^{en} = \{u_1; v_1 | u_2; v_2 | u_3; v_3 | u_4; v_4\}^T$$

dla $w = 1; \dots; LWE$, $e = 1; \dots; LE$

Do aproksymacji obydwu przemieszczeń $u(\xi; \eta)$ i $v(\xi; \eta)$ używane również są funkcje kształtu biliniowe (liniowe względem dwóch bezwymiarowych unormowanych współrzędnych niezależnych)

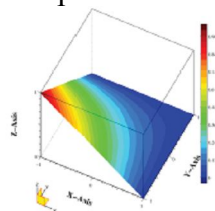
$N_i(\xi; \eta)$, gdzie $i=1,2,3,4$

$$\mathbf{u}^n(\xi, \eta)_{(2 \times 1)} = \{u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)\} = \mathbf{N}_{(2 \times 8)}^n \mathbf{q}_{(8 \times 1)}^{en}$$

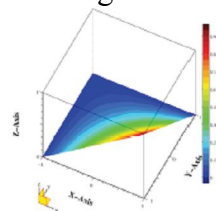
$$u(\xi, \eta) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$v(\xi, \eta) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

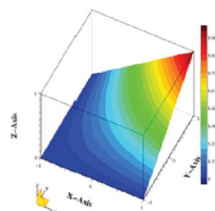
Graficznie, funkcje te można przedstawić w postaci diagramów



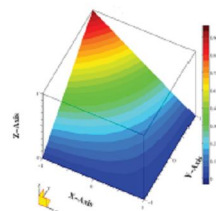
$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$



$$N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

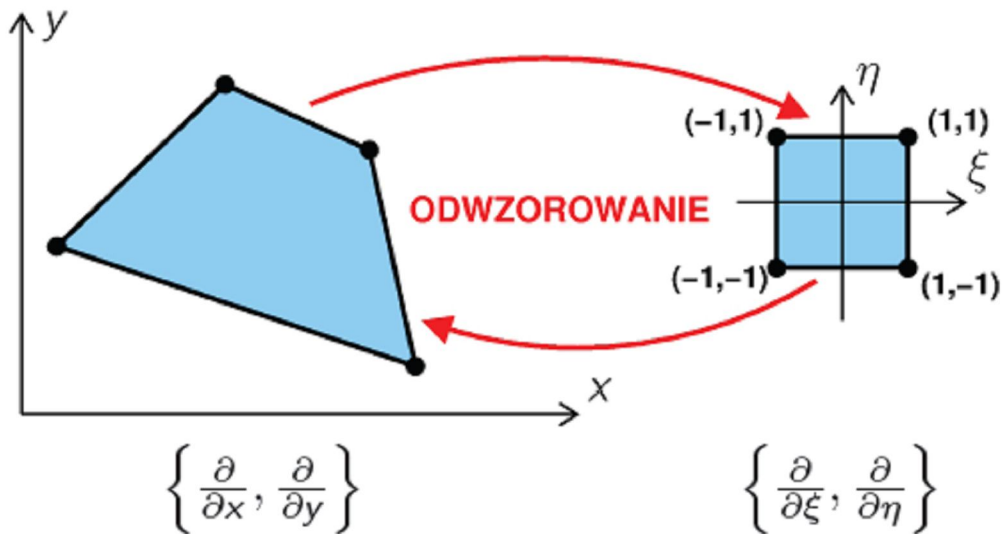


$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$



$$N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

Część obliczeń wykonywana jest na elemencie wzorcowym, np. wyznaczenie macierzy pochodnych funkcji kształtu: $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$.



Element wzorcowy $\xi, \eta \in [-1,1]$

Jakobian relacji między pochodnym jest postaci:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie: } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Wektor obciążeń powierzchniowych:

$$\mathbf{q}^{n,e} = \{q_x, q_y\}^{n,e}$$

Macierz funkcji kształtu ma wymiar 2x8 i postać:

$$\mathbf{N}^n = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

Wektor zastępników węzłowych obciążeń powierzchniowych (macierz o wymiarze 8x1):

$$\mathbf{f}^{n,e} = \int \int_{A^e} (\mathbf{N}^{n,e})^T \mathbf{q}^{n,e} dA$$

Gdy fragment brzegu ∂A^e leży na brzegu obszaru ∂A_σ , to podobnie obliczamy wektor zastępników węzłowych obciążeń brzegowych $\mathbf{f}_b^{n,e}$

Macierz sztywności (macierz o wymiarze 8x8).

$$\mathbf{k}^{n,e} = \int \int_{A^e} (\mathbf{B}^{n,e})^T \mathbf{D}^{n,e} \mathbf{B}^{n,e} dA$$

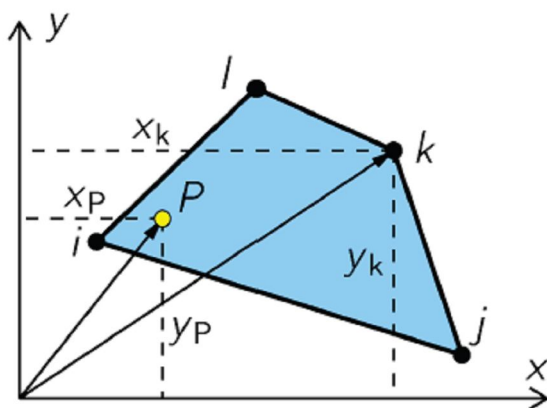
gdzie macierz związków kinematycznych jest macierzą o wymiarze 3x8 uwzględniającą stopnie swobody węzłów:

$$B^n = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

a macierz związków fizycznych:

$$D^n = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Aproksymacja geometrii



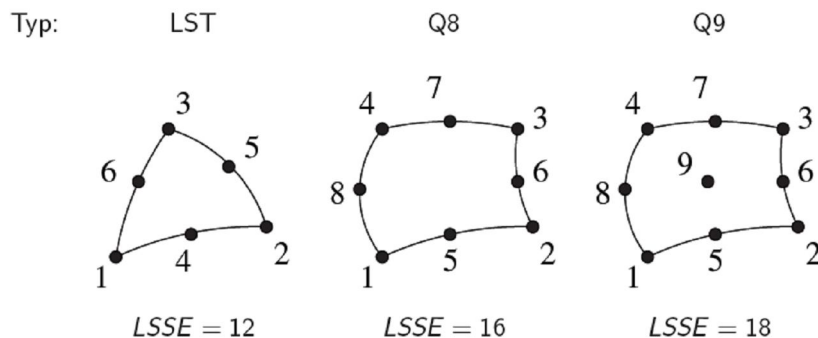
$\forall P \in \Omega^e : \mathbf{x}_P(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{x}^e$,
gdzie:

$$\mathbf{x}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \\ x_l \\ y_l \end{bmatrix}$$

Jeśli do aproksymacji geometrii i pola przemieszczeń wykorzystujemy te same węzły i te same funkcje kształtu to mówimy, że element skończony jest izoparametryczny.

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{x}^e \quad \mathbf{u}(\xi, \eta) = \mathbf{N}(\xi, \eta) \mathbf{q}^e$$

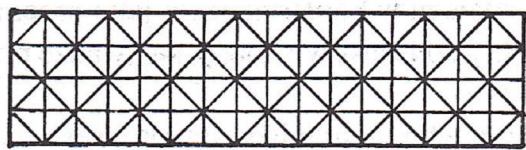
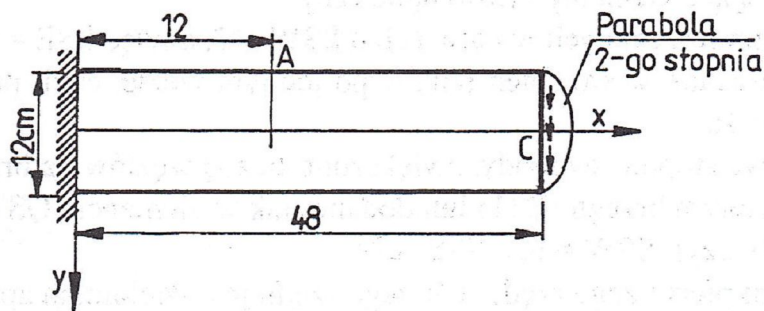
Elementy skończone, stosowane do modelowania konstrukcji tarczowych są bardzo różnorodne:



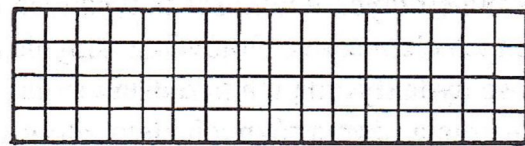
Wzrastająca liczba węzłów podwyższa stopień wielomianu interpolacyjnego do opisu geometrii i pola przemieszczeń.

Różnice obliczeń dla różnych elementów skończonych przedstawiono za M. Kleiberem.

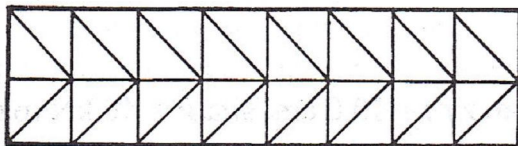
Element	Liczba elementów	Ugięcie V_c	Naprężenia w punkcie A, σ_x [N/cm ²]
GST	128	0,45834	51,225
LST	32	0,53259	59,145
QST2	8	0,53059	58,973
R1	64	0,51679	58,266
R3	4	0,52807	60,631
Belka zginana		0,53374	60,000



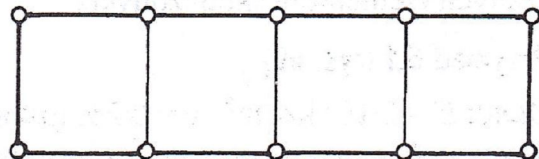
$m=128$ CST



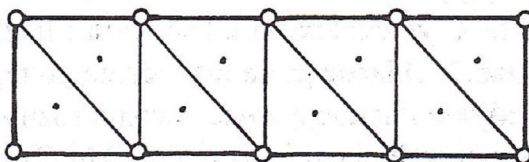
$m=64$ R1



$m=32$ LST



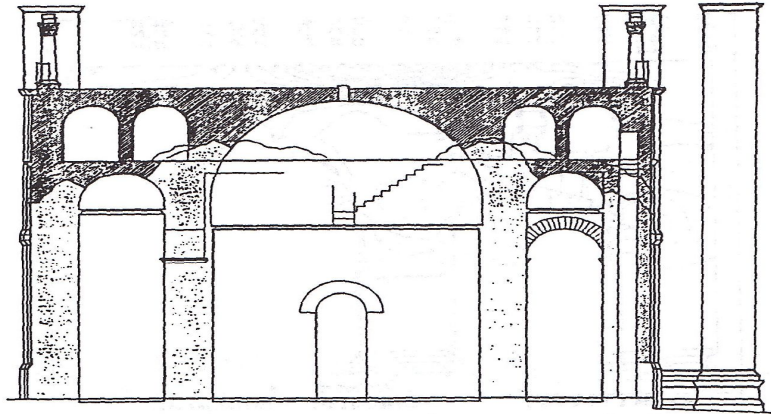
$m=4$ R3



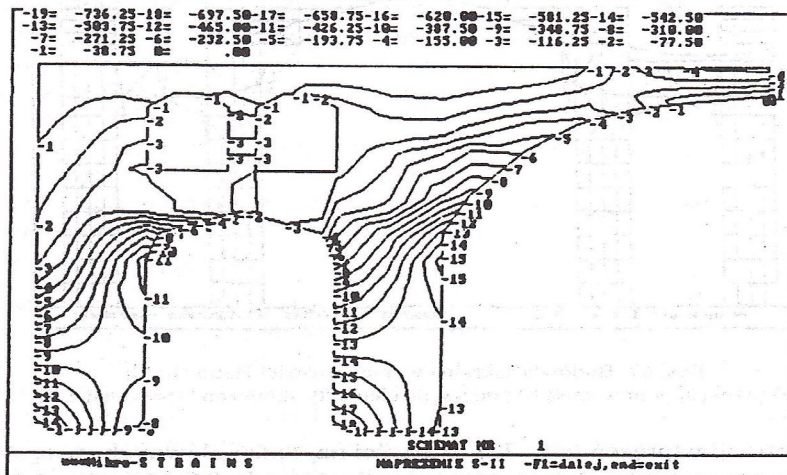
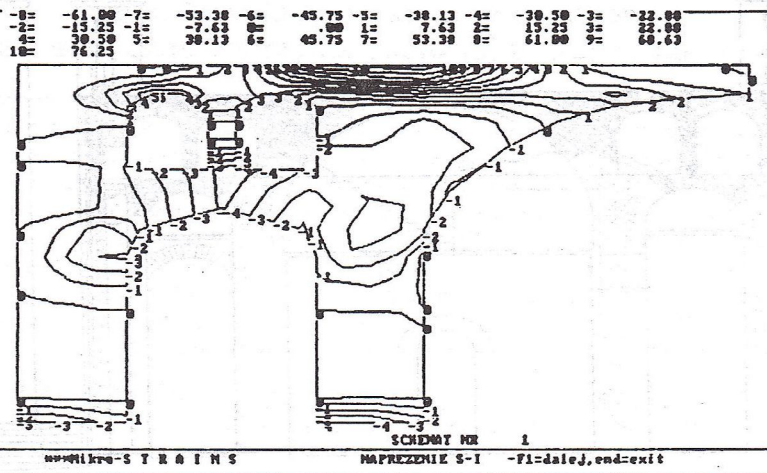
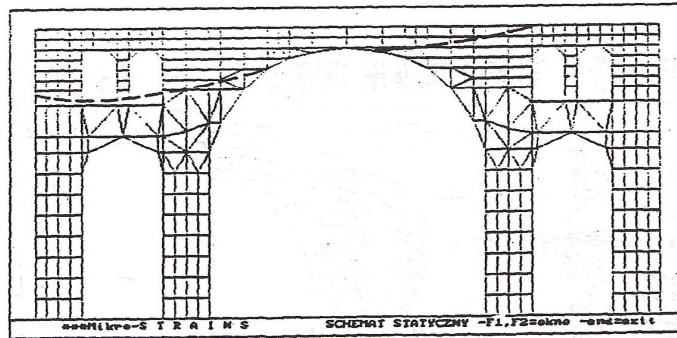
$m=8$ QST 2

Po obliczeniach z równań MES otrzymujemy pola odkształceń. Na podstawie tych wartości otrzymuje się pozostałe rezultaty (naprężenia, zbrojenie, weryfikację stanów granicznych) przez proste zależności matematyczne nie ingerując w dyskretyzację i rozwiązanie równań konstytutywnych.

a)



b)



Konstrukcje płytowe

Konstrukcje płytowe są takie konstrukcje, których dwa wymiary są dłuższe od trzeciego i obciążenie jest przyłożone prostopadłe do dłuższych wymiarów.

Rozróżnia się tutaj dwa przypadki:

- płyty grube, modelowane zazwyczaj elementami bryłowymi, i
- płyty cienkie, modelowane elementami płytowymi.

Modelowanie konstrukcji płytowych odbywa się przy następujących założeniach:

- element konstrukcyjny jest płaski o bokach l_1 i l_2 oraz stałej grubości t ,
- grubość t nie przekracza $1/10$ wymiaru z mniejszego z boków,
- obciążenie działa tylko prostopadłe do płaszczyzny zawartej między bokami l_1 i l_2 ,
- prosta prostopadła do środkowej płaszczyzny płyty pozostaje prostopadła do niej po odkształceniu płyty.

Zakłada się, że zjawiska statyczno wytrzymałościowe przebiegają w obszarze sprężystym w zakresie małych przemieszczeń w prostopadłych do środkowej płaszczyzny płyty opisanej równaniem.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(xy)}{K}$$

gdzie $p(xy)$ jest obciążeniem równomiernie rozłożonym na płycie, a:

$$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

Uogólnione odkształcenie płyty mierzy się jej krzywizna κ w odpowiednim kierunku i zwichrzeniem χ wywołanym przez skręcanie, czyli

$$\{\varepsilon\} = \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \chi_{xy}\}$$

albo

$$\{\varepsilon\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$$

Uogólnione naprężenia są wywołane momentami zginającymi i skręcającymi

$$\{\sigma\} = \{M_x \quad M_y \quad M_{xy}\}$$

Przy czym, w analizie sprężystej, naprężenia normalne σ_x i σ_y rozkładają się na grubości płyty według zależności:

$$\sigma_x = \frac{6M_x}{t^2} z, \quad \sigma_y = \frac{6M_y}{t^2} z$$

gdzie współrzędna z jest mierzona od środkowej płaszczyzny płyty

Naprężenia styczne τ_{xz} i τ_{yz} oblicza się z zależności:

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2t} \left(1 - \frac{4z^2}{t^2} \right) \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)$$

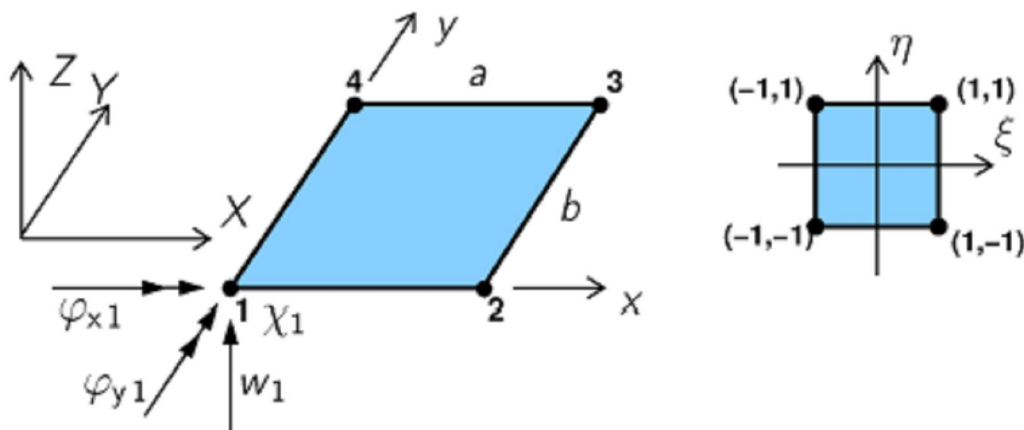
W obliczeniach MES wygodniej jest zamiast krzywizny elementu operować kątem obrotu w węźle.

Stopnie swobody w węźle:

$$\mathbf{q}_w = \{w, \varphi_x, \varphi_y, \chi\}_w = \left\{ w, \frac{\partial w}{\partial y}, -\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}_w$$

Stopnie swobody w elemencie:

$$\mathbf{q}^e = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \chi_1 \mid w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, \chi_2 \mid w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}, \chi_3 \mid w_4, \varphi_{x4}, \varphi_{y4}, \chi_4\}$$



Bezwymiarowe współrzędne powierzchniowe:

$$\xi = 2 \left(\frac{x}{a} \right) - 1, \quad \eta = 2 \left(\frac{y}{b} \right) - 1$$

Wielomianowa aproksymacja:

$$w(\xi, \eta) = (\alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3)(\beta_1 + \beta_2 \eta + \beta_3 \eta^2 + \beta_4 \eta^3) =$$

$$C_1 +$$

$$C_2 \xi + C_3 \eta +$$

$$C_4 \xi^2 + C_5 \xi \eta + C_6 \eta^2 +$$

$$C_7 \xi^3 + C_8 \xi^2 \eta + C_9 \xi \eta^2 + C_{10} \eta^3 +$$

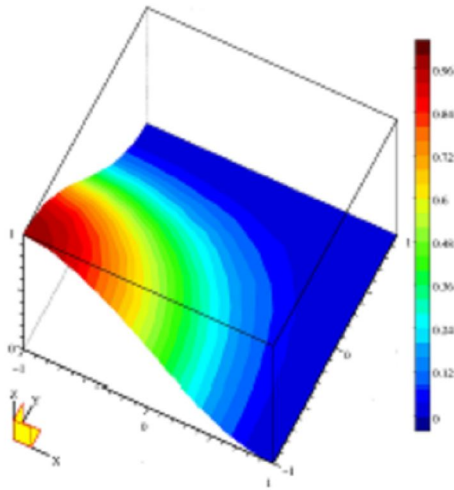
$$C_{11} \xi^3 \eta + C_{12} \xi^2 \eta^2 + C_{13} \xi \eta^3 +$$

$$C_{14} \xi^3 \eta^2 + C_{15} \xi^2 \eta^3 +$$

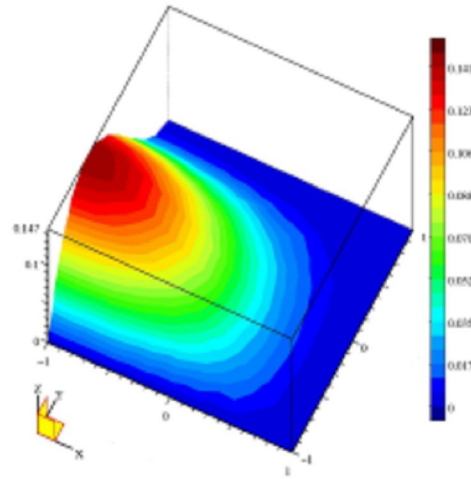
$$C_{16} \xi^3 \eta^3$$

$$\mathbf{u}^e = \{w(\xi, \eta)\} = \mathbf{N}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{q}^e =$$

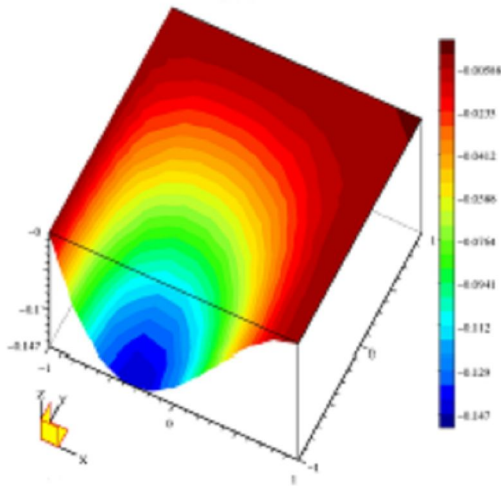
$$= \{N_1^1, N_1^2, N_1^3, N_1^4, \mid N_2^1 \dots \mid \dots \mid \dots N_4^4\} \cdot \{w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, \chi_1 \mid w_2 \dots \mid \dots \mid \dots \chi_4\}^T$$



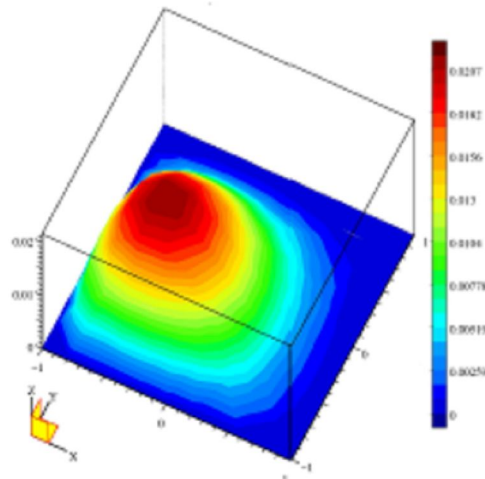
N_1^1 odpowiadająca w_1



N_1^2 odpowiadająca φ_{x1}



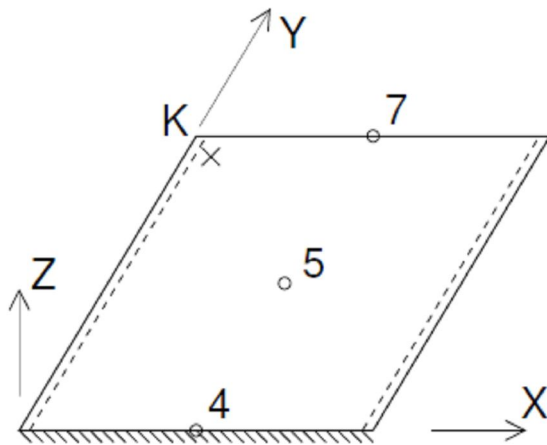
N_1^3 odpowiadająca φ_{y1}



N_1^4 odpowiadająca χ_1

$$\mathbf{M} \approx \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1/l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1/l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l_1 l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1/l_2 & 0 & 1/l_2 & 0 & 0 & 1/l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1/l_1 & 0 & -1/l_1 & 0 & 0 & -1/l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l_1 l_2 & 0 & 0 & 1/l_1 l_2 & 0 & 0 & 1/l_1 l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 1/l_2 & 0 & 1/l_2 & 2/l_2 & 0 & 1/l_2 & 2/l_2 & 3/l_2 & 1/l_2 & 2/l_2 & 3/l_2 & 2/l_2 & 3/l_2 & 1/l_2 \\
 0 & -1/l_1 & 0 & -2/l_1 & -1/l_1 & 0 & -3/l_1 & -2/l_1 & -1/l_1 & 0 & -3/l_1 & -2/l_1 & -1/l_1 & -3/l_1 & -2/l_1 & -1/l_1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l_1 l_2 & 0 & 0 & 2/l_1 l_2 & 2/l_1 l_2 & 0 & 3/l_1 l_2 & 4/l_1 l_2 & 3/l_1 l_2 & 6/l_1 l_2 & 6/l_1 l_2 & 9/l_1 l_2 \\
 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1/l_2 & 0 & 0 & 2/l_2 & 0 & 0 & 0 & 1/l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1/l_1 & 0 & 0 & -1/l_1 & 0 & 0 & 0 & -1/l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l_1 l_2 & 0 & 0 & 0 & 2/l_1 l_2 & 0 & 0 & 0 & 3/l_1 l_2 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

Analiza płyty kwadratowej

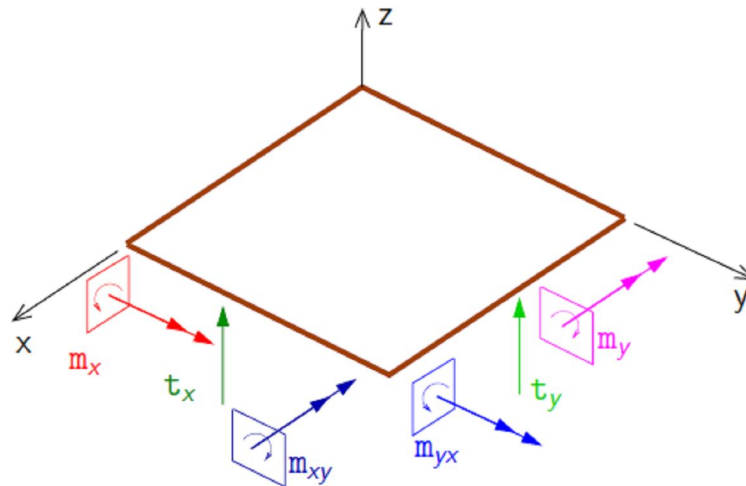


Dane:

- wymiary płyty
 $L_X = L_Y = 3.0 \text{ m}$
- grubość płyty $h = 0.12 \text{ m}$
- obciążenie
 $p_z = q = -14.4 \text{ kN/m}^2$
- moduł Younga
 $E = 32.0 \cdot 10^6 \text{ kPa}$
- współczynnik Poissona $\nu = 0$

Sztywność giętna płyty wynosi $D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{32000 \cdot 0,12^3}{12(1-\nu^2)} = 4608 \text{ kNm}$

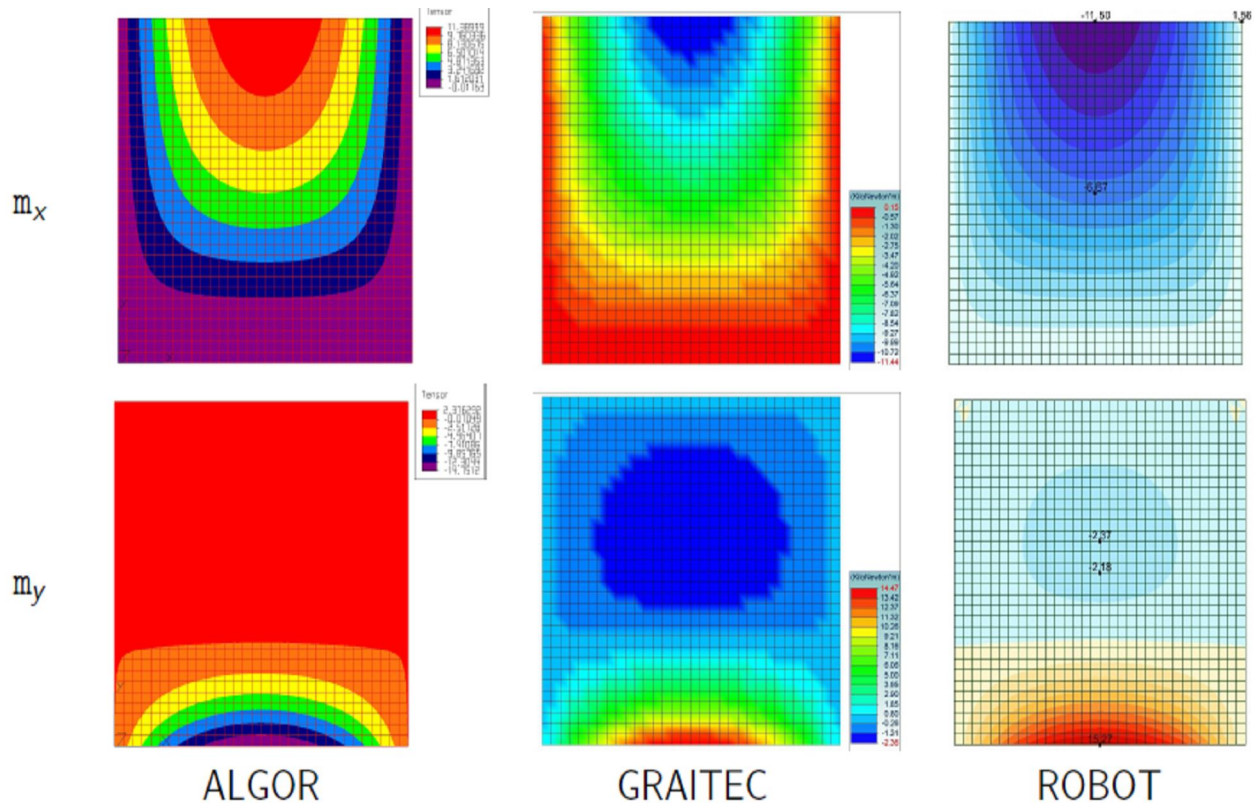
W tablicach inżynierskich i programie ROBOT przyjęto os 0Z skierowana góry, co pociąga za sobą oznaczanie dodatnich momentów zginających powodujących rozciągające naprężenia na powierzchni górnej.



		w_7 [mm]	m_{x7} [$\frac{\text{kNm}}{\text{m}}$]	m_{x5} [$\frac{\text{kNm}}{\text{m}}$]	m_{y5} [$\frac{\text{kNm}}{\text{m}}$]	m_{y4} [$\frac{\text{kNm}}{\text{m}}$]
Tablice inż.		-2.303	-11.37	-6.58	-2.19	15.23
Program	Siatka					
ALGOR	8×8	-2.316	-11.27	-6.53	-2.15	13.20
GRAITEC	8×8	-2.344	-11.51	-6.64	-2.31	12.27
ROBOT	8×8	-2.355	-11.63	-6.73	-2.30	14.96
ALGOR	32×32	-2.344	-11.39	-6.59	-2.19	14.75
GRAITEC	32×32	-2.392	-11.44	-6.66	-2.18	14.47
ROBOT	32×32	-2.394	-11.50	-6.67	-2.21	15.19
ROBOT	128×128	-2.410	-11.47	-6.68	-2.16	15.29

Można analizować także momenty w narożu, gdzie spotykają się – swobodna i przegubowo podparta krawędź – są to momenty główne M_I, M_{II} (o różnych znakach!) i zależności:

$$M_I = -M_{II} = 0,0156qL_x L_y$$



Konstrukcje powłokowe

Konstrukcje powłokowe, to takie konstrukcje, które łączą w sobie cechy płyt i tarcz. Ze względu na grubość, powłoki dzielimy na:

- cienkie, stosujemy teorie Kirchhoffa-Love'a,
- umiarkowanie cienkie, stosujemy teorie Mindlina-Reissnera,
- grube, obliczamy zagadnienia 3D, np. typowe zagadnienie z mechaniki brył.

Powłoka cienka

Powłoka jako ustrój powierzchniowy charakteryzuje się wartością grubości dużo mniejszą od promieni głównych krzywizn:

$$\frac{t}{R_{\min}} < \frac{1}{20} \div \frac{1}{30}$$

Hipoteza kinematyczna:

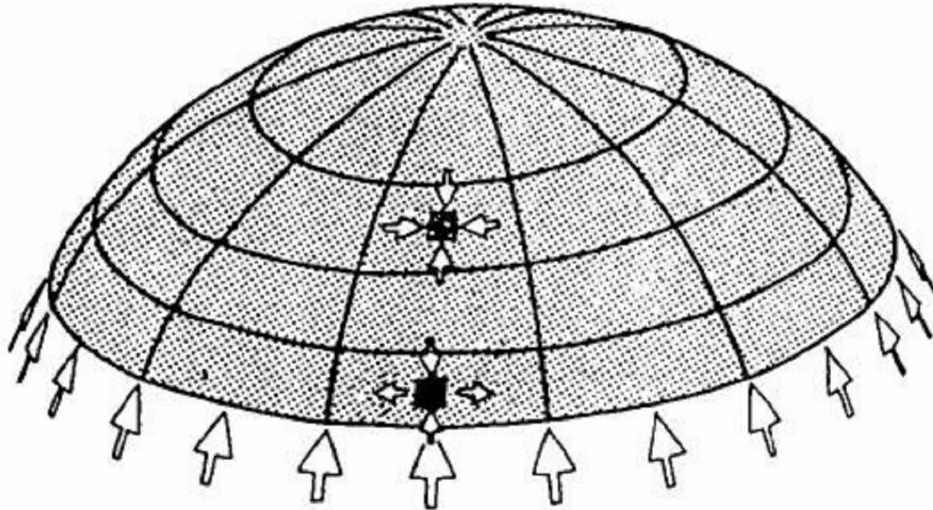
Niezależnymi kinematycznymi polami w powłokach są **trzy liniowe przemieszczenia**:

$u_1(\xi_1; \xi_2); u_2(\xi_1; \xi_2); w(\xi_1; \xi_2)$; w kierunkach lokalnej bazy ($\mathbf{e}_1; \mathbf{e}_2; \mathbf{n}$), wprowadzanej w punkcie powierzchni środkowej powłoki.

Hipoteza statyczna:

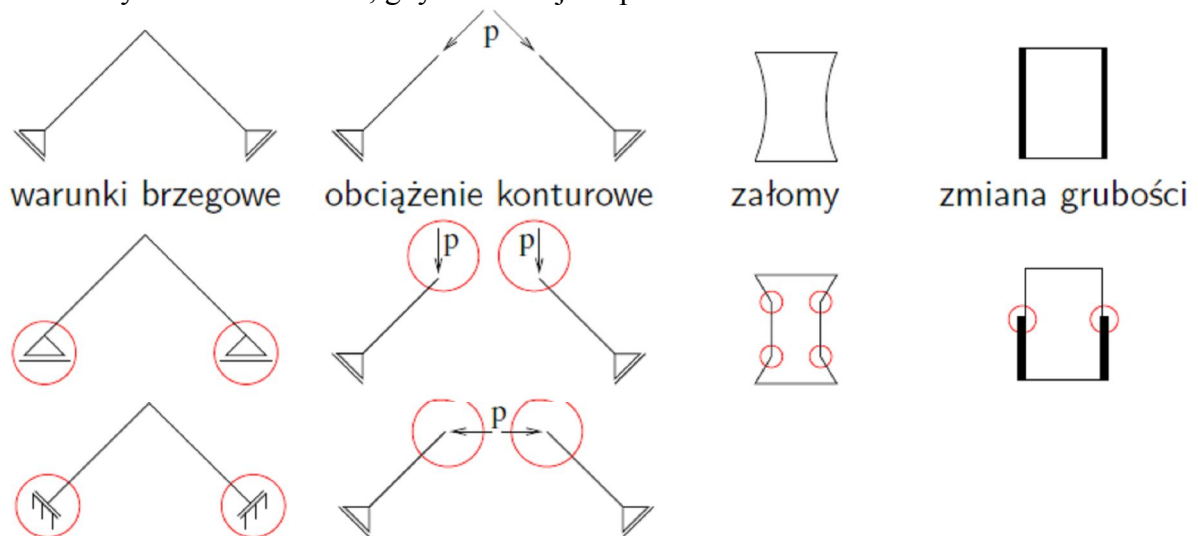
w powłokach cienkich naprężenia $\sigma_n; \tau_{1n}; \tau_{2n}$ są nieporównywalnie mniejsze od pozostałych naprężeń.

Stan membranowy – rozkład naprężeń wzdłuż grubości jest jednorodny. Stan ten jest w powłokach najkorzystniejszy (optymalny) z punktu wykorzystania materiału. Przy spełnieniu pewnych warunków podparcia i obciążenia może być on zrealizowany w rzeczywistych konstrukcjach.



W przypadku zaburzenia stanu membranowego następuje:

- Szybki wzrost momentów i sił poprzecznych w kierunku źródła
- Szybkie ich zanikanie, gdy nie istnieje w pobliżu inne źródło



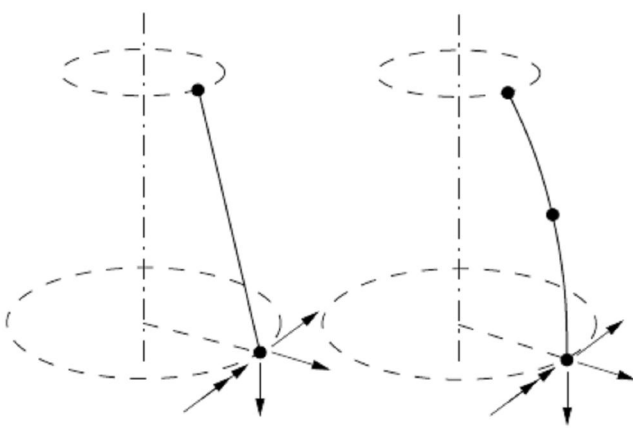
Podział elementów skończonych do modelowania powłok:

- elementy skończone oparte na teorii powłok
 - elementy skończone geometrycznie jednowymiarowe
 - elementy skończone dwuwymiarowe płaskie trój- i czterowęzłowe
 - elementy skończone dwuwymiarowe zakrzywione oparte na teorii powłok cienkich Kirchhoffa-Love'a albo na teorii powłok umiarkowanie cienkich Mindlina-Reissnera
- elementy skończone tzw. zdegenerowane, oparte na równaniach kontinuum 3D, zmodyfikowanych hipotezami powłokowymi, spójne z pięcioparametrową teorią powłok Mindlina-Reissnera
- elementy skończone bryłowe, korzystające z równań kontinuum 3D, opisujące powłoki grube

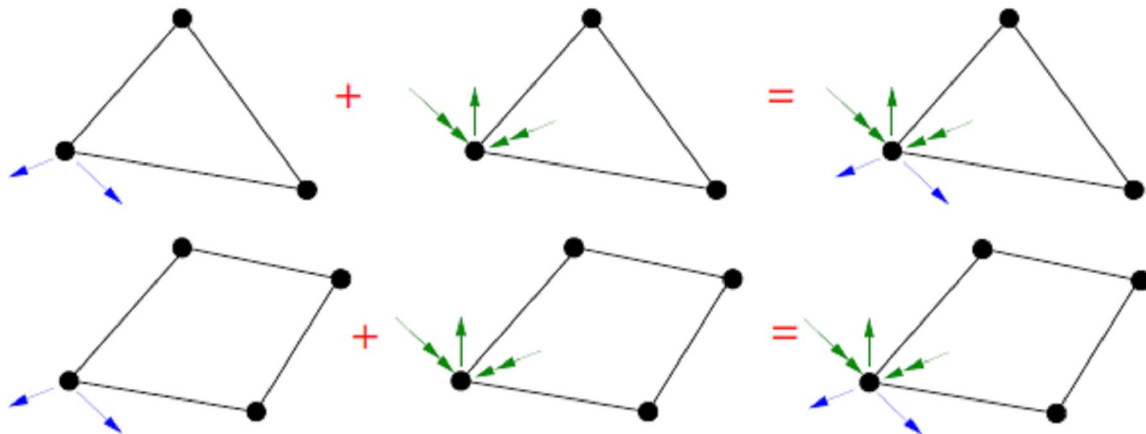
Powyższa klasyfikacja wiąże się z:

- liczbą aproksymowanych pól wewnątrz elementu skończonego,
- liczbą i rodzajem stopni swobody węzła,
- wzorami użytymi do obliczania energii wewnętrznej oraz sposobem całkowania po obszarze elementu skończonego przy liczeniu macierzy sztywności i wektorów węzłowych obciążeń.

Dla powłok osiowo obrotowych elementy skończone geometrycznie jednowymiarowe dyskretyzują południk powłoki osiowo symetrycznej, z zastosowaniem analitycznego rozwinięcia wszystkich funkcji w szereg trygonometryczny zmiennej obwodowej.

$$\mathbf{u}(\xi, \Theta) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^J u^j(\xi) \cos(j\Theta) \\ \sum_{j=1}^J v^j(\xi) \sin(j\Theta) \\ \sum_{j=1}^J w^j(\xi) \cos(j\Theta) \end{bmatrix}$$


Płaskie powłokowe elementy skończone z trzema lub czterema węzłami tworzone są w wyniku złożenia elementów tarczowych i płytowych



Stosując model przemieszczeniowy, w węzle takiego elementu skończonego występują następujące stopnie swobody:

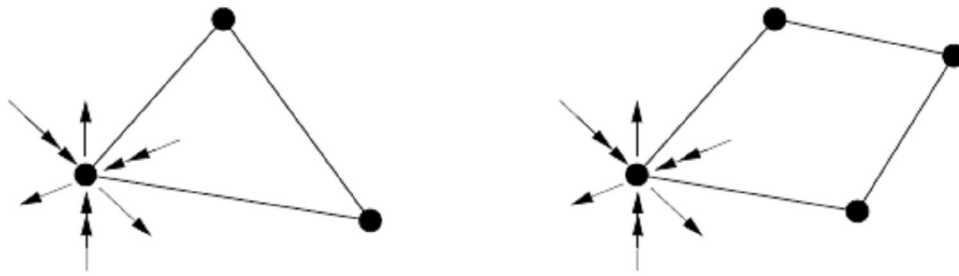
$$\mathbf{q}_w^t = \{u, v\}_w \quad \mathbf{q}_w^p = \{w, \varphi_x, \varphi_y\}_w$$

$$\mathbf{q}_w = \{\mathbf{q}_w^t, \mathbf{q}_w^p\}_w = \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y\}_w$$

Do dyskretyzacji powłok z załomami i/lub rozgałęzieniami musi być wprowadzony do węzła trzeci rotacyjny stopień swobody φ_n czyli węzłowy **szósty** stopień swobody, a zatem:

$$\mathbf{q}_w = \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y \mid \varphi_n\}_w$$

Kąt φ_n - obrotu wokół normalnej nie może być pomijany przy aproksymacji przemieszczeń powierzchni środkowej, ze względu na konieczność transformacji wektorów obrotów do układu globalnego (X, Y, Z).



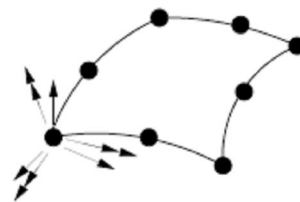
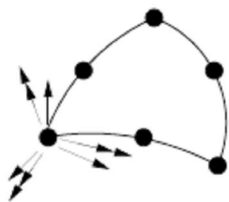
Aproksymacja pola przemieszczeń
(3 składowe translacyjne):

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) = \{u_1(\xi_1, \xi_2), u_2(\xi_1, \xi_2), w(\xi_1, \xi_2)\} = \{u(\xi_1, \xi_2), v(\xi_1, \xi_2), w(\xi_1, \xi_2)\} = \underset{[3 \times LSSE]}{\mathbf{N}} \cdot \underset{[LSSE \times 1]}{\mathbf{q}^e}$$

Wektor SSW:

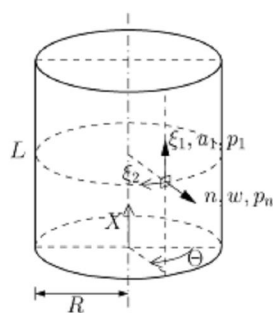
$$\mathbf{q}_w = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2\}_w \text{ lub } \mathbf{q}_w = \{u, v, w, \varphi_1, \varphi_2 | \varphi_n\}_w$$

LSSW = 6
LW = 6
LSSE = 36



LSSW = 6
LW = 8
LSSE = 48

Równanie różniczkowe przemieszczeniowe 4-go rzędu dla osiowo symetrycznego stanu membranowo-giętnego i jego rozwiązanie wygląda następująco



$$w^{IV}(x) + 4\beta^4 w(x) = \frac{1}{D^m} [p_n + \frac{\nu}{R} (\int p_1 dx + C_1)]$$

$$\text{gdzie: } \beta = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \cdot \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$$

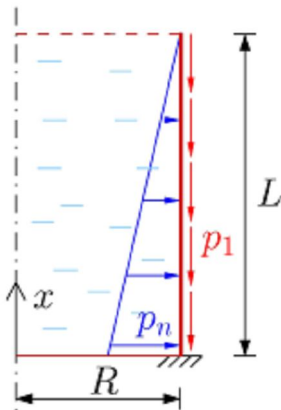
$$w(x) = \underbrace{e^{-\beta x} [B_1 \cos(\beta x) + B_2 \sin(\beta x)]}_{\text{szybko maleje przy wzroście } x} + \underbrace{e^{+\beta x} [B_3 \cos(\beta x) + B_4 \sin(\beta x)]}_{\text{szybko rośnie przy wzroście } x} + \bar{w}(x)$$

$\bar{w}(x)$ – funkcja ugięcia dla stanu bezmomentowego osiowo symetrycznego
 $w^o(x)$ – funkcja ugięcia opisująca lokalny stan giętny

- pojawiają się moment $M_1(x)$ i siła poprzeczna $T_1(x)$.
- ulegają modyfikacji przemieszczenie $w(x)$ i siła równoleżnikowa $n_2(x)$.

Geometria, materiał, obciążenie

- wysokość $L = H = 20.0$ m
- promień $R = 10.0$ m
- grubość $h = 0.12$ m
- moduł Younga $E = 15.0 \cdot 10^6$ kPa
- współczynnik Poissona $\nu = \frac{1}{6} \approx 0.1667$
- ciężar własny
 $p_1 = -\gamma_b h = -24 \cdot 0.12 = -2.88$ kPa
- parcie hydrostatyczne
 $p_n = \gamma_c(L - x) = 10(20 - x)$ kPa
- sztywność giętna
 $D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 2221.7$ kNm
- warunki brzegowe
 $w(0) = 0, w'(0) = 0,$
 $m_1(L) = 0, \tau_1(L) = 0$



Powłoka długa?

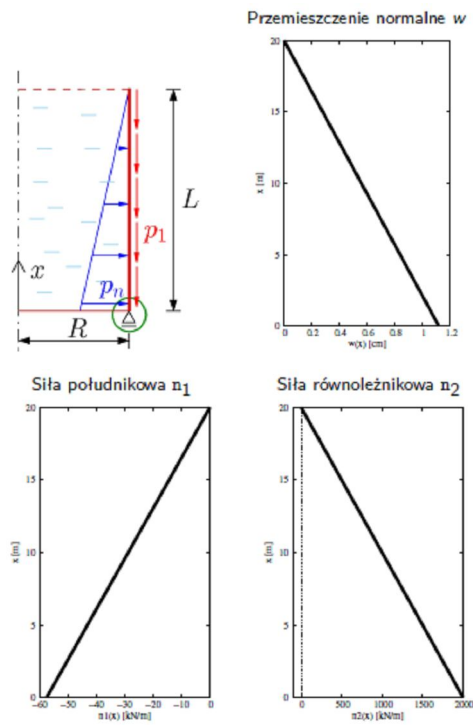
$$\beta = 1.193 \frac{1}{\text{m}}, \lambda = \frac{\pi}{\beta} \approx 2.63 \text{ m}$$

λ - długość półfali

Czy $3 \cdot \lambda < L$?

$\approx 7.9 \text{ m} < 20 \text{ m} \Rightarrow \text{TAK}$

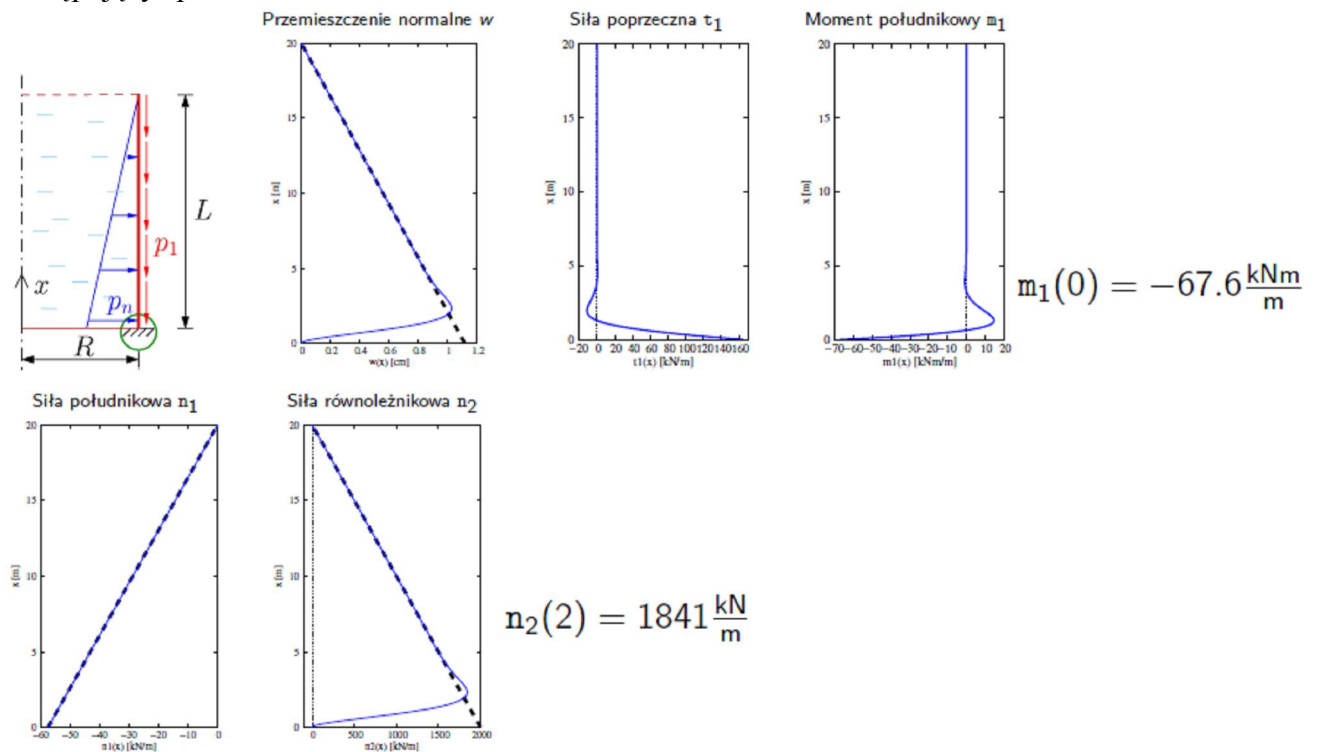
Rozwiązanie stanu bezmomentowego dla powłoki wygląda następująco:

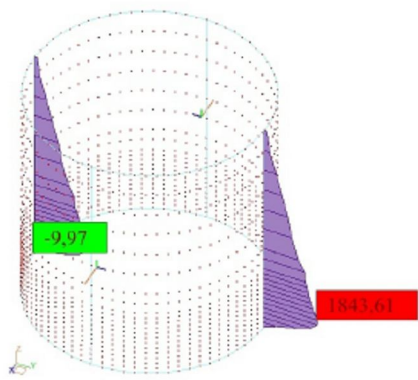


Funkcja przemieszczenia normalnego:

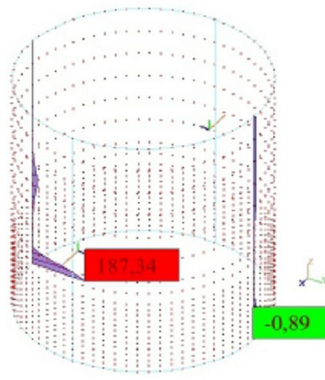
$$w(x) = \bar{w}(x) = \frac{R}{Eh}(\gamma_c R + \nu \gamma_b h)(L-x)$$

Zaburzenia stanu bezmomentowego zmieniają wykresy funkcji aproksymujących w następujący sposób:

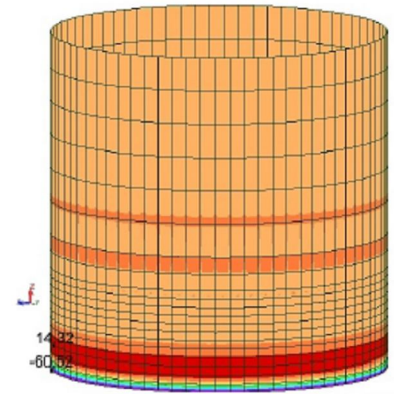




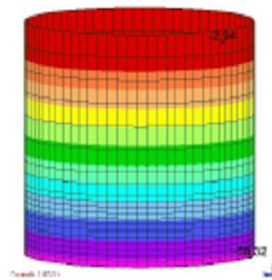
Siła równoleżnikowa n_2



Siła poprzeczna t_1



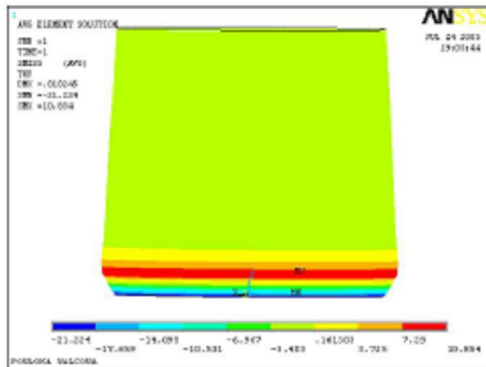
Moment południkowy m_1



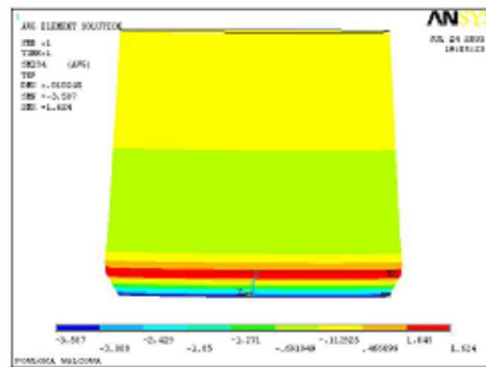
Siła południkowa n_1 od ciężaru własnego

Zaburzenia stanu bezmomentowego wygląda następująco:

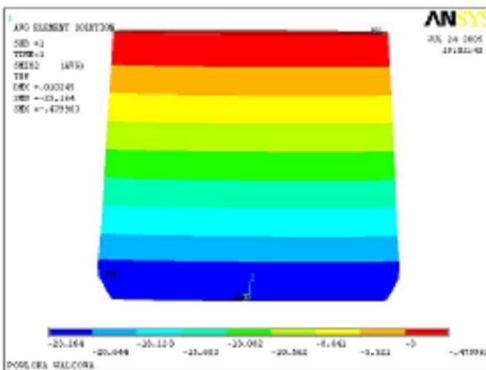
Moment południkowy m_1



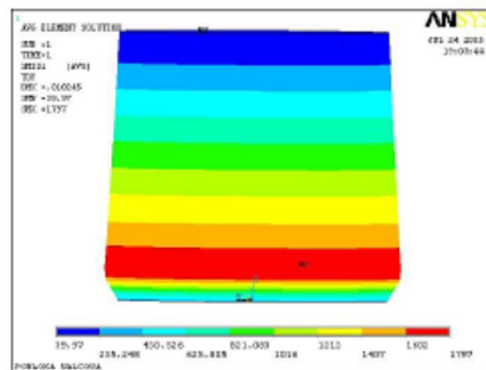
Moment równoleżnikowy m_2



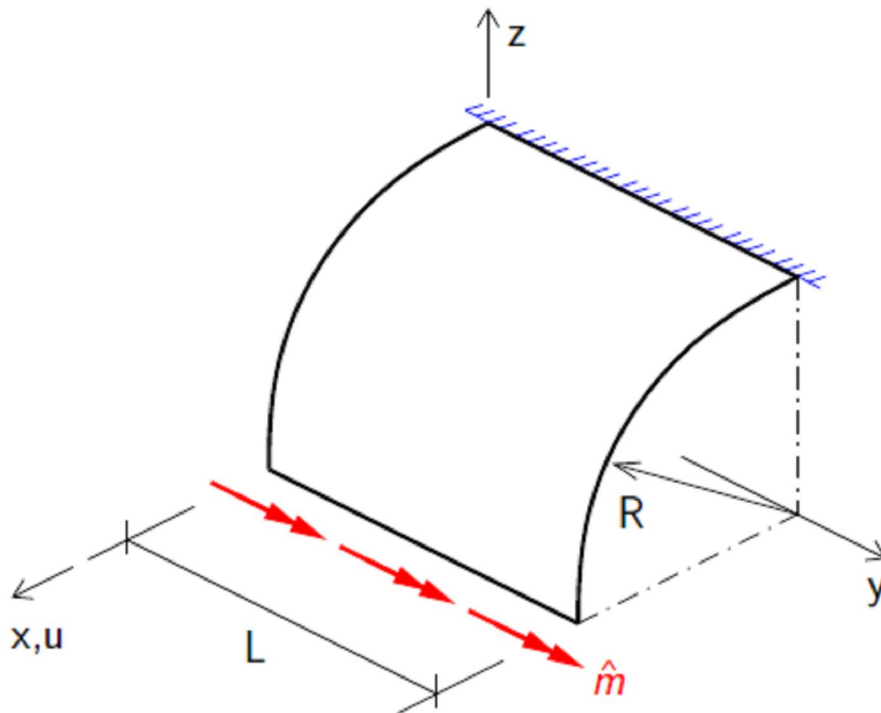
Siła południkowa n_1



Siła równoleżnikowa n_2



Weryfikacja jakości elementów powłokowych polega na sprawdzeniu cech geometrycznych i wyników obliczeń.:



Wariantujemy:

- wielkości geometryczne powłoki: $R/h = 10-100$,
- typ siatki elementów skończonych: regularna – nieregularna

Momentowe obciążenie brzegowe powinno wywołać:

- przemieszczenie brzegu zgodne z analitycznym rozwiązaniem:

$$u = \frac{\hat{m}R^2}{D^m}$$

gdzie: $D^m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

- **zerowe** siły membranowe,
- stałe momenty M_2 .

Dodatkowo kontroli podlega stosunek maksymalnego membranowego naprężenia do maksymalnego naprężenia ze stanu giętego.

Błędy dyskretyzacji w modelach komputerowych

Numeryczne obliczenia konstrukcji mogą być wykonywane na dwa sposoby albo przez bezpośrednie rozwiązywanie matematyczne sformułowanego zagadnienia (rozwiązywanie równań konstytutywnych), bądź przez wykonywanie obliczeń dotyczących konstrukcji budowlanych z wykorzystaniem MES. Podczas tych obliczeń mogą wystąpić następujące błędy:

- błąd wynikający z wadliwie przyjętego modelu,
- błąd metody (tzw. „błąd obcięcia” – przejście z procesu nieskończonego do skończonego),
- błąd zaokrąglenia,
- błąd metody MES- wynikający z jej istoty zwany błędem dyskretyzacji.

Błąd modelu jest błędem merytorycznym. Przenosi on wady modelu i sposobu obliczania równań na wyniki. Powoduje w ten sposób nieprzewidywalne i nieobliczalne przez projektanta skutki. Uniknięcie jego jest trudne, gdyż nie tylko wymaga sprawdzenia przyjętego modelu konstrukcji, ale również sprawdzenia wewnętrznych metod programowych np. przez wykonanie obliczeń inną metodą.

Źródłem błędu metody jest rozwiązywanie zadania w postaci przybliżonej, tzn. zastąpienie działań nieskończonych (sumowania szeregów, całkowania, różniczkowania) przybliżonymi działaniami skończonymi. Dotyczy to następujących przypadków:

obliczanie wartości funkcji elementarnej np. $\sin x$ za pomocą n - początkowych składników szeregu Taylora,

zastąpienie całki z funkcji sumą skończoną funkcji,

rozwiązywanie równania różniczkowego przez zastąpienie pochodnej jej przybliżeniem (ilorazem różnicowym)

rozwiązywaniem równań metodą iteracyjną Newtona, która daje na ogół wynik tylko w granicy.

Błąd dyskretyzacji wynika z uwarunkowań jakie prezentują macierze sztywności którymi dysponujemy, czyli z zasady według której dokonujemy podziału modelu komputerowego konstrukcji na elementy skończone. Nadrzędnym warunkiem, do którego dąży się podczas tworzenia takiego modelu, jest zbliżenie wartości energii wewnętrznej modelu komputerowego do wartości energii wewnętrznej konstrukcji rzeczywistej. Za miarę błędu dyskretyzacji można więc przyjąć różnicę między tymi dwoma wielkościami.