

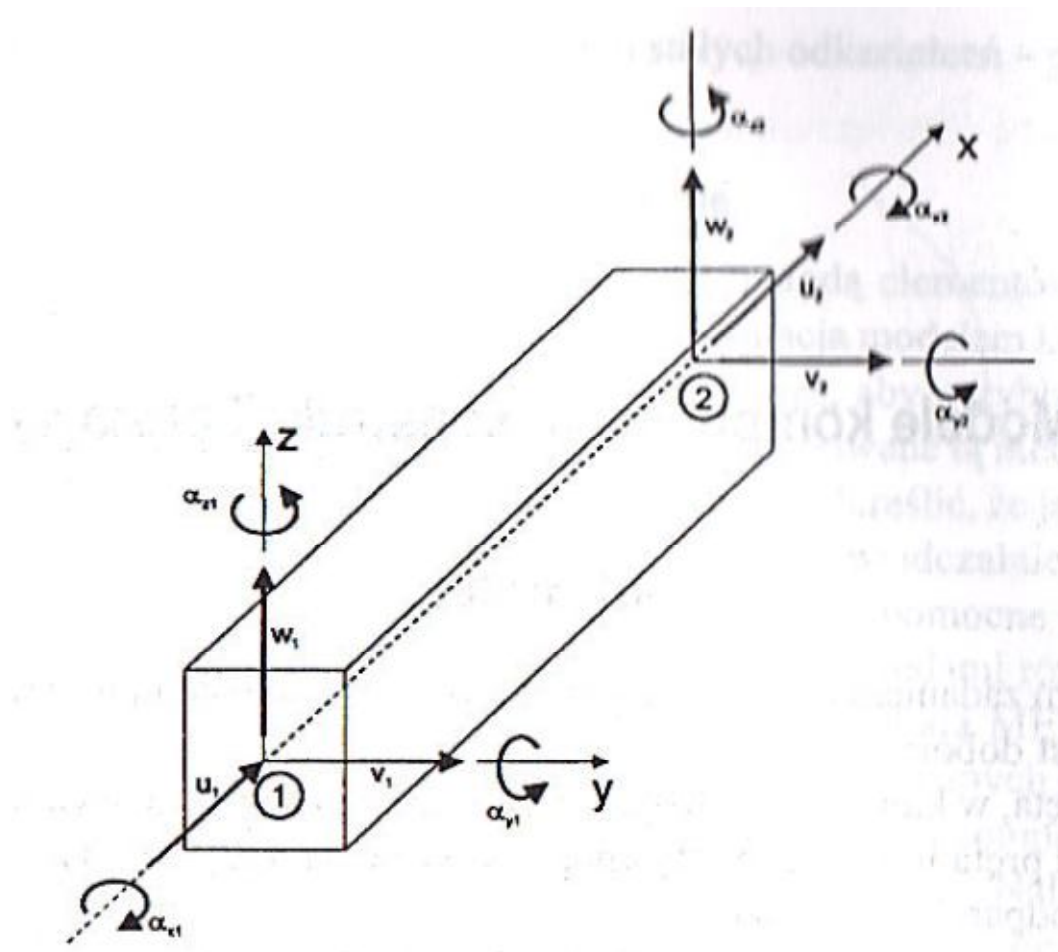
MODELE KOMPUTEROWE KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH

Zasadniczym zadaniem konstruktora w tworzeniu modelu komputerowego konstrukcji prętowych jest dobór

- modelu pręta z uwzględnieniem wymiarów poprzecznych, materiału, sztywności, parametrów podatnościowych w węźle konstrukcji
- modelu konstrukcji, zszycia poszczególnych prętów w węzłach, geometrii układu konstrukcyjnego
- podparcia konstrukcji, podpory sztywne, przegubowe, stopnie swobody

Elementy konstrukcji prętowych modelowane są za pomocą pręta prostego dla którego określa się:

- liczbę stopni swobody pręta wynikającą z liczby stopni swobody każdego węzła
- założenia dotyczące związków geometrycznych przemieszczeń i odkształceń oraz fizycznych odkształceń i naprężeń
- macierzy sztywności pręta



Wektor przemieszczeń

$$q^e = \{q_1, q_2\}^e = \{u_1, v_1, w_1, \alpha_{x1}, \alpha_{y1}, \alpha_{z1}, u_2, v_2, w_2, \alpha_{x2}, \alpha_{y2}, \alpha_{z2}\}$$

Rodzaj konstrukcji	Ilość stopni swobody	Przesunięcia			Obroty		
		u_x	u_y	u_z	φ_x	φ_y	φ_z
	N_D						
krata płaska	2	•	•				
krata przestrzenna	3	•	•	•			
rama płaska	3	•	•				•
rama przestrzenna	6	•	•	•	•	•	•
ruszt	3			•	•	•	

Macierz sztywności dla pręta prostego

Dla pręta o długości l poddany obciążeniu na końcach siłami N_1 i N_2 wywołującymi przemieszczenia u_1 i u_2 .

Wektory sił zewnętrznych i przemieszczeń wyrażają się wzorem

$$Q = \{N_1, N_2\}, \quad q = \{u_1, u_2\}$$

Funkcja kształtu z wielomianu Lagrange'a

- dla pręta obciążonego osiowo

$$EAu''(x) + p_x = 0$$

- dla pręta nieobciążonego

$$u''(x) = 0$$

Po scałkowaniu otrzymujemy funkcję

$$u = A_1 + A_2x$$

Przyjmując warunki brzegowe $u_1 = 1, u_2 = 0$ i $u_1 = 0, u_2 = 1$ otrzymujemy stałe całkowania w postaci $A_1 = 1, A_2 = -1/l$ i $A_1 = 0, u_2 = 1/l$.

Podstawiając stałe całkowania do wzorów funkcji Lagrange'a dla elementu dwuwęzłowego otrzymujemy:

$$\text{- dla węzła pierwszego } \phi_1 = \frac{x-1}{0-1} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$\text{- dla węzła drugiego } \phi_2 = \frac{x-0}{l-0} = \frac{x}{l}$$

Pole przemieszczeń opisuje wielomian

$$u = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_1 + \frac{x}{l} u_2$$

Związek geometryczny odkształceń z przemieszczeniami ma postać $\varepsilon = \frac{du}{dx} = u_x$

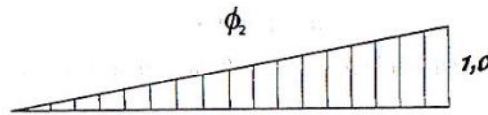
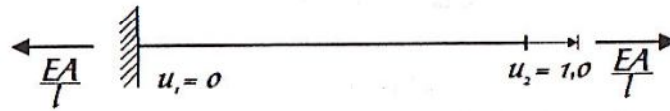
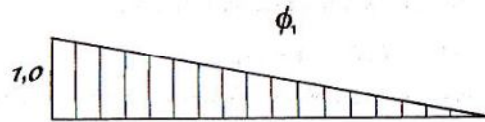
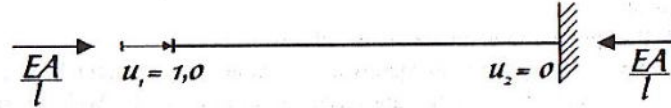
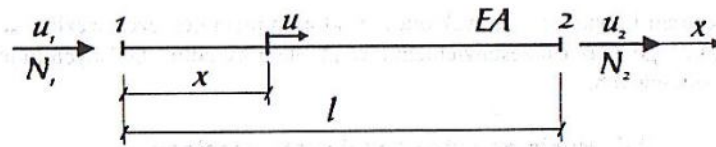
Pole odkształceń elementu

$$\varepsilon = u_x = (\phi q)_x = \phi_x q = Bq$$

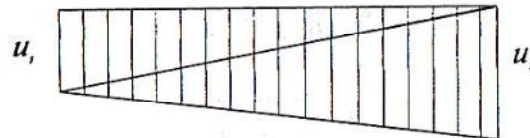
$$\text{gdzie } B = \phi_x = \{\phi_1, \phi_2\}_x = \left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(\frac{x}{l}\right) \right\}_x = \left[\left(-\frac{1}{l}\right) \left(\frac{1}{l}\right) \right] = \frac{1}{l} [-1, +1]$$

związek fizyczny naprężenie odkształcenie $\varepsilon = \frac{N}{EA}$, stąd wewnętrzna siła osiowa w przecię:

$$N = EA\varepsilon = EABq$$



$$u = \phi q$$



Praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych:

$$\delta L_z = \delta q^T Q = \delta u_1 N_1 + \delta u_2 N_2$$

Praca sił wewnętrznych wywołuje odkształcenia $\delta L_w = duN$, różniczkując po długości otrzymamy

$$\delta L_w = \int_1 \delta q^T B^T EABq dx$$

Z warunku równowagi prac wirtualnych $\delta q^T Q = \int_1 \delta q^T B^T EABq dx$, stąd $Q = EAq \int_1 B^T B dx$

Transponowana macierz sztywności wygląda w następujący sposób $B^T = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$

A macierz sztywności pręta $k = \frac{EA}{L} \begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}$, a równanie pręta ma postać

$$\begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \end{vmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{vmatrix}$$

Po wymnożeniu otrzymuje się układ równań

$$N_1 = \frac{EA}{L}(u_1 - u_2)$$

$$N_2 = \frac{EA}{L}(-u_1 + u_2)$$

Pręt zginany w jednej płaszczyźnie

Dla pręta o długości l poddany obciążeniu na końcach momentami M_1 i M_2 wywołującymi przemieszczenia α_1 i α_2 , oraz siłami poprzecznymi do pręta T_1 i T_2 wywołującymi przemieszczenia w_1 i w_2 ,

Wektory sił zewnętrznych i przemieszczeń wyrażają się wzorem

$$Q = \{T_1, M_1, T_2, M_2\}, \quad q = \{w_1, \alpha_1, w_2, \alpha_2\}$$

Funkcja kształtu z wielomianu Hermite'a

Po scałkowaniu otrzymujemy funkcję przemieszczeń

$$w = H_{01}^1(x)w_1 + H_{11}^1(x)\alpha_1 + H_{02}^1(x)w_2 + H_{12}^1(x)\alpha_2$$

Funkcja krzywizny linii ugięcia

$$\kappa = w'' = (\phi q)'' = \phi'' q = Bq$$

$$B = |\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4|'' = \left\{ 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}; \frac{x}{l}\left(\frac{x}{l} - 1\right)^2; \frac{x^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{x}{l}\right); \frac{x^2}{l^2}\left(3 - 2\frac{x}{l}\right) \right\}''$$

$$= \left[\frac{-6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}; \frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}; \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}; -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right]$$

związek fizyczny naprężenie odkształcenie:

$$M = EI\kappa = EIBq$$

stąd wewnętrzna siła osiowa w pręcie

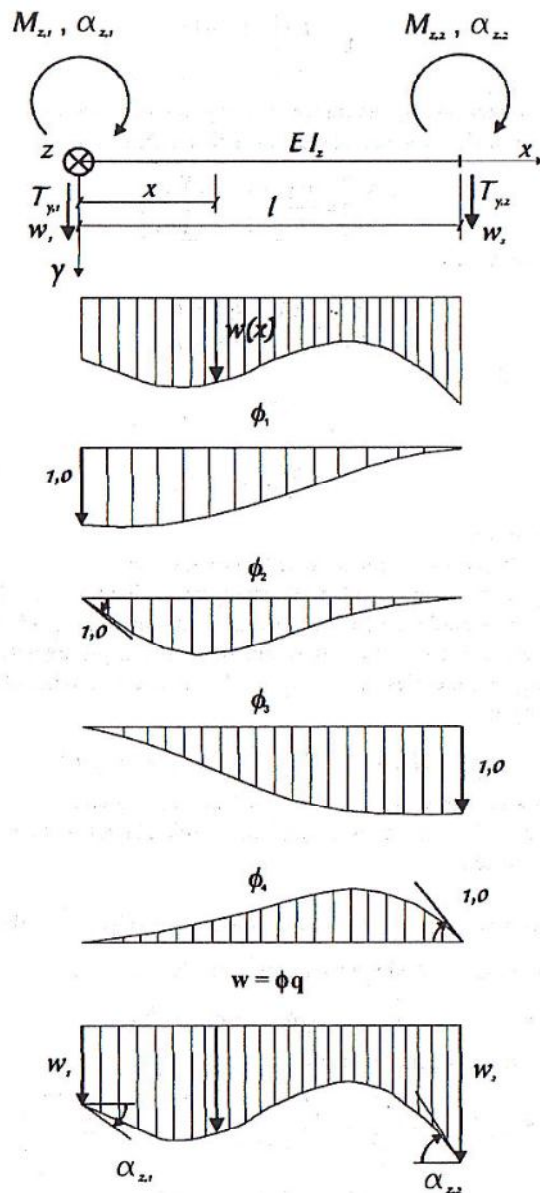
Praca sił zewnętrznych na przemieszczeniach wirtualnych:

$$\delta L_z = \delta\alpha_1 M_1 + \delta w_1 T_1 + \delta\alpha_2 M_2 + \delta w_2 T_2 = \delta q^T Q$$

Praca sił wewnętrznych wywołuje odkształcenia $\delta L_w = d\alpha M$, różniczkując po długości otrzymamy

$$\delta L_w = \int_0^l \delta q^T B^T EIBq dx$$

Z warunku równowagi prac wirtualnych $\delta q^T Q = \int_0^l \delta q^T B^T EIBq dx$, stąd $Q = EIq \int_0^l B^T B dx$



Macierz sztywności pręta $k = EI$ $\begin{vmatrix} 12 & 6 & 12 & 6 \\ l^3 & l^2 & l^3 & l^2 \\ 6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & -12 & 6 \\ l^3 & l^2 & l^3 & l^2 \\ 6 & 2 & 6 & 4 \\ -12 & 6 & -12 & 6 \\ l^3 & l^2 & l^3 & l^2 \end{vmatrix}$, a równanie macierzowe pręta ma postać

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \alpha_1 \\ w_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

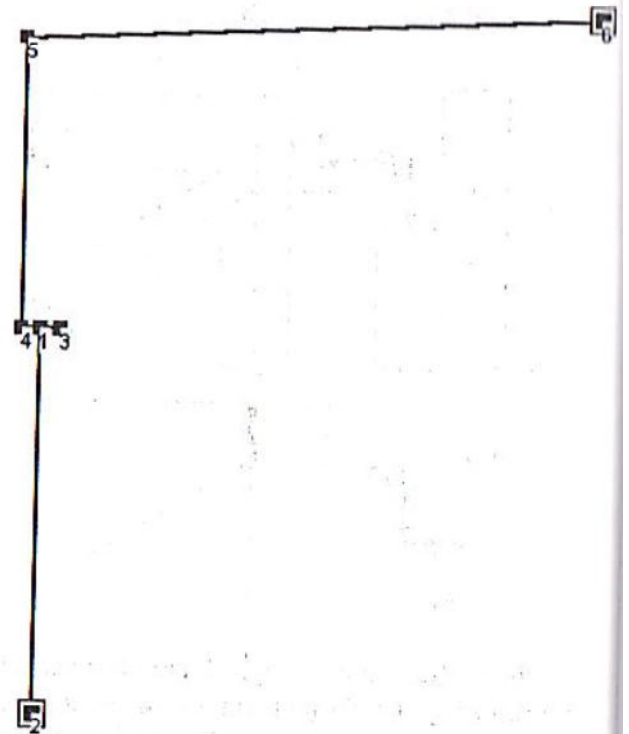
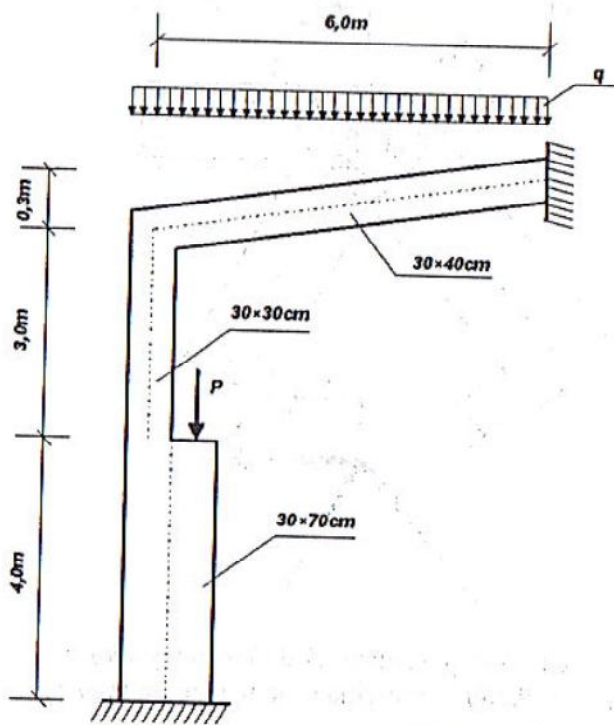
Po wymnożeniu otrzymuje się układ równań

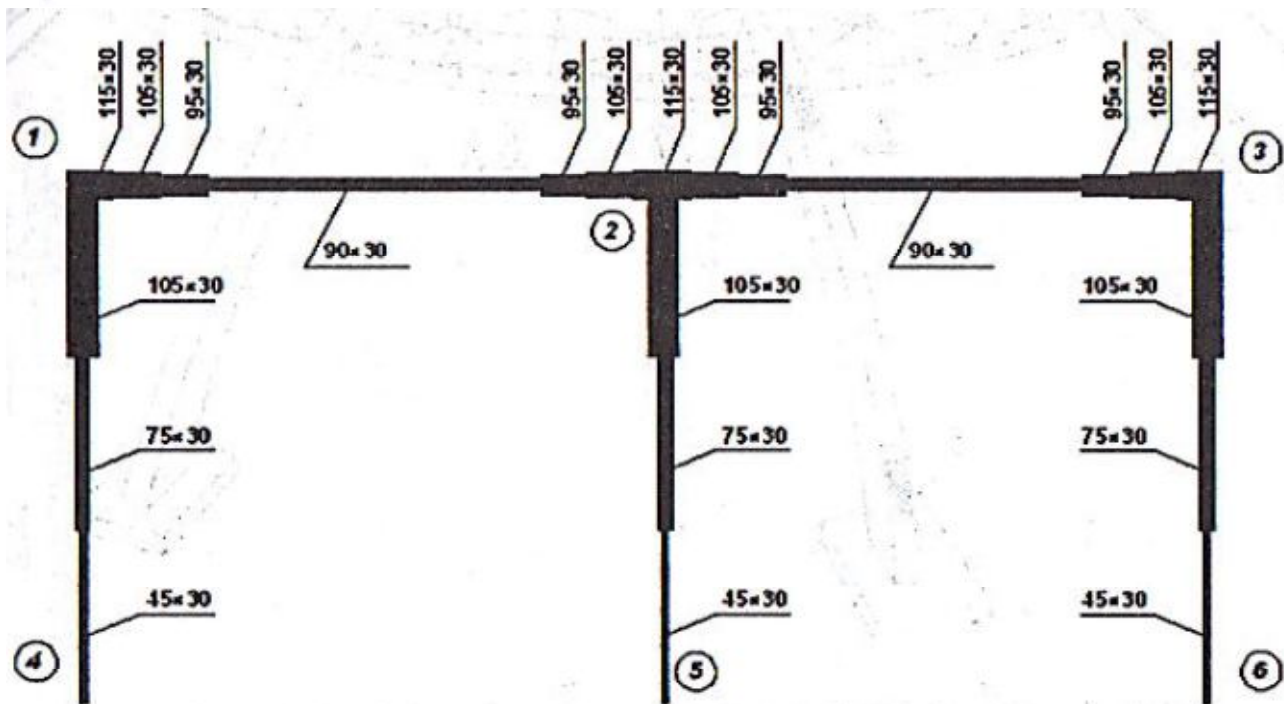
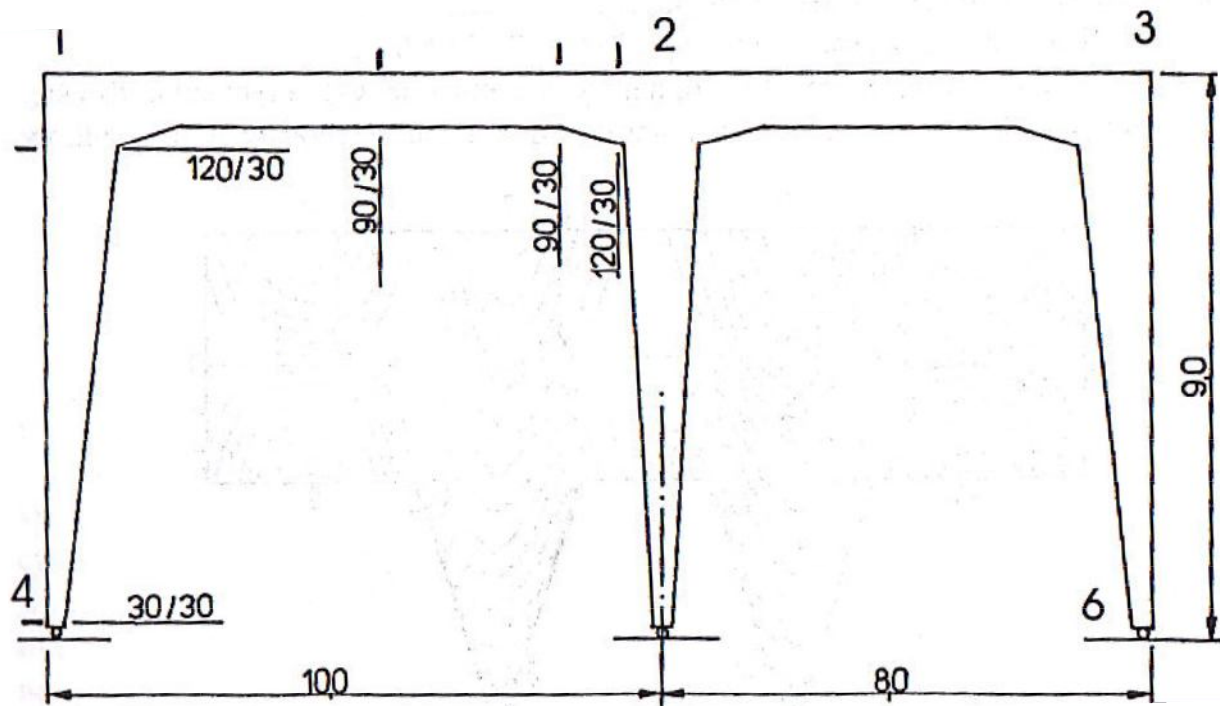
$$T_1 = EI \left(\frac{12}{l^3} w_1 - \frac{6}{l^2} \alpha_1 - \frac{12}{l^3} w_2 - \frac{6}{l^2} \alpha_2 \right)$$

$$M_1 = EI \left(-\frac{6}{l^2} w_1 + \frac{4}{l} \alpha_1 + \frac{6}{l^2} w_2 + \frac{2}{l} \alpha_2 \right)$$

$$T_2 = EI \left(-\frac{12}{l^3} w_1 + \frac{6}{l^2} \alpha_1 + \frac{12}{l^3} w_2 + \frac{6}{l^2} \alpha_2 \right)$$

$$M_2 = EI \left(-\frac{6}{l^2} w_1 + \frac{2}{l} \alpha_1 + \frac{6}{l^2} w_2 + \frac{4}{l} \alpha_2 \right)$$





10. Draw and specify the plan of a two-bay window as shown in Fig. 10.10.

Równanie metody elementów skończonych dla modelu w *globalnym układzie* odniesienia zapisać możemy jako:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

gdzie \mathbf{K} jest globalną macierzą sztywności analizowanego układu, a wektorem parametrów węzłowych (przemieszczeń, obrotów - jeśli występują), \mathbf{f} wektorem (węzłowych) obciążeń zewnętrznych.

Podobną zależność zapisać możemy również dla pojedynczego elementu skończonego:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{V}_i = \mathbf{S}_i, \quad (2)$$

gdzie \mathbf{k}_i jest macierzą sztywności i -tego elementu w układzie globalnym, \mathbf{V}_i wektorem parametrów węzłowych elementu, \mathbf{S}_i obciążeniem działającym w węzłach i -tego elementu.

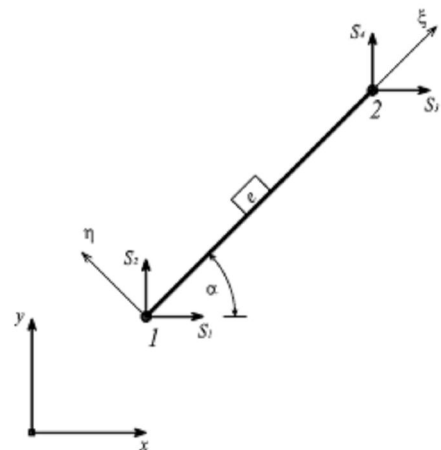
Przejście pomiędzy lokalnym układem współrzędnych (dla danego elementu) oraz globalnym układem współrzędnych (dla całej konstrukcji) wymaga uwzględnienia różnicy kątów pomiędzy osiami obu układów. Macierz kosinusów w przestrzeni 2D zapisać możemy jako

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(x, \eta) \\ \cos(y, \xi) & \cos(y, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie x, y są osiami globalnego układu współrzędnych, ξ, η są osiami układu lokalnego, zaś α wyraża kąt pomiędzy osiami obu układów odniesienia.

Przyjmując dla uproszczenia założenie, że $c = \cos(\alpha)$ oraz $s = \sin(\alpha)$, równanie (3) skraca się do postaci

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$



Aby transformować wektory obciążenia (pomiędzy układami odniesienia), posłużyć należy się następującymi formułami podanymi w notacji macierzowej

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{S}_{i,l} \Leftrightarrow \mathbf{S}_{i,l} = \mathbf{C}_i^T \cdot \mathbf{S}_i. \quad (4)$$

W identyczny sposób transformują się wektory przemieszczeń

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V}_{i,l} \Leftrightarrow \mathbf{V}_{i,l} = \mathbf{C}_i^T \cdot \mathbf{V}_i. \quad (5)$$

Wymiar tzw. macierzy kierunkowej \mathbf{C}_i zależy może np. od liczby stopni swobody w węźle i liczby węzłów w danym elemencie. Przykładowo dla elementu prętowego z dwoma stopniami swobody w każdym węźle, macierz kierunkowa będzie mieć wymiar 4×4 i przyjmie postać

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Wówczas formułę transformacji wektora obciążeń (4) zapisać możemy jako

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_i} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N_\xi \\ T_\eta \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} N_\xi \\ T_\eta \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_{i,l}}$$

Zapisując równanie MES dla elementu w układzie lokalnym (analogicznie do (2)) jako

$$\mathbf{S}_{i,l} = \mathbf{k}_{i,l} \mathbf{V}_{i,l}$$

możemy podstawić je do równania (4), a uwzględniając zależność (5) dostaniemy

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{k}_{i,l} \mathbf{V}_{i,l} = \underbrace{\mathbf{C}_i \mathbf{k}_{i,l} \mathbf{C}_i^T}_{\mathbf{k}_i} \mathbf{V}_i = \mathbf{k}_i \mathbf{V}_i$$

Przez analogię do równania MES spostrzec można, że równanie transformacji lokalnej macierzy sztywności elementu w macierz globalną elementu zdefiniować możemy zależnością

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{k}_{i,l} \cdot \mathbf{C}_i^T \quad (4)$$

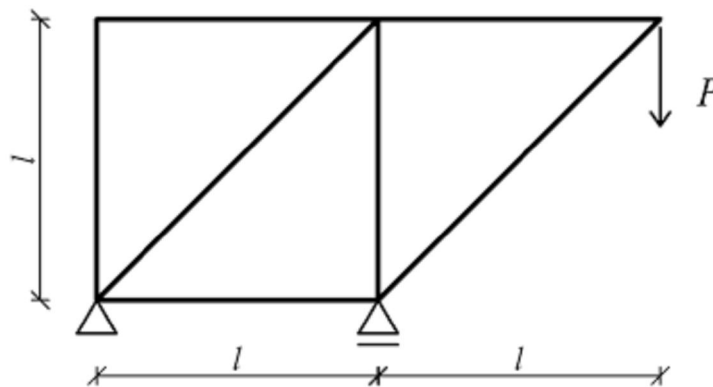
Zatem dla wspomnianego elementu prętowego z dwoma stopniami swobody w każdym węźle, przekształcenie macierzy lokalnej w globalną przyjmie postać:

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_i = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(i)} & \mathbf{k}_{12}^{(i)} \\ \mathbf{k}_{21}^{(i)} & \mathbf{k}_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Schemat kratownicy 2D

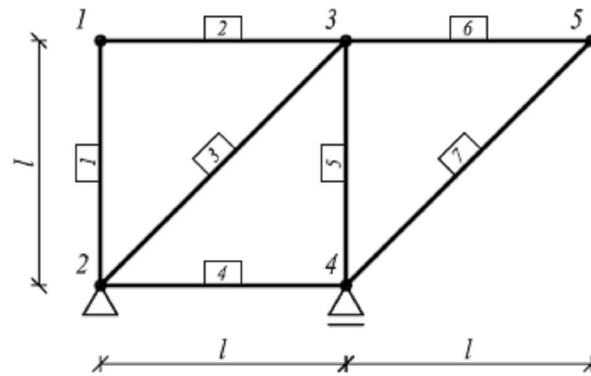
Dla przykładu rozwiążmy za pomocą MES prosty układ kratownicowy, którego schemat pokazano na poniższym rysunku.



Rysunek 1: Schemat kratownicy.

Dyskretyzacja

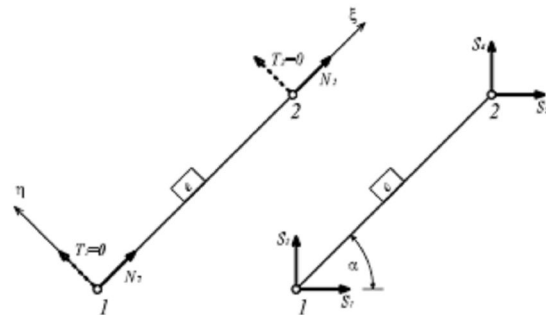
Pierwszym etapem algorytmu MES jest dyskretyzacja (idealizacja) rozważanego modelu. Polega to przede wszystkim na podziale konstrukcji na elementy skończone, a następnie ponumerowaniu zdefiniowanych w ten sposób węzłów i elementów.



Rysunek 2: Dyskretyzacja układu kratownicy.

Analiza Elementu

Następnie w każdym z węzłów przyjmujemy odpowiednią do danego typu elementu liczbę stopni swobody. Dla elementu kratowniczowego ($T=0$) sytuacja ta pokazana została na rysunku obok.



Lokalną macierz sztywności i -tego elementu kratowniczowego zapisać możemy jako:

$$\mathbf{k}_{i,l} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Rysunek 3: Dodatnie kierunki sił dla układu lokalnego i globalnego.

Macierze sztywności elementu

Korzystając z równania (4) otrzymujemy globalną macierz sztywności k_i dla i -tego elementu w postaci (5):

$$k_i = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Zatem dla kolejnych elementów naszego modelu, nachylonych do układu globalnego pod kątem α , dostaniemy

$$\begin{aligned} (\alpha = 0^\circ, c = 1, s = 0) \quad k_2 = k_4 = k_6 &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\alpha = 90^\circ, c = 0, s = 1) \quad k_1 = k_5 &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (\alpha = 45^\circ, c = s = \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad k_3 = k_7 &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agregacja

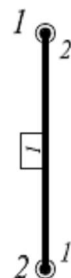
Kolejnym etapem algorytmu MES złożenie macierzy sztywności każdego z elementów w globalną macierz całego układu wg zależności

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_7 \quad (7)$$

Macierze sztywności K_i muszą uwzględniać zarówno informację o początkowym i końcowym węźle danego elementu, jak również położenie danego elementu w analizowanym układzie.

Konstruując zatem globalną macierz sztywności K_1 (dla elementu nr 1), wiemy że element ten ma swój początek w węźle nr 2 (wg globalnej numeracji węzłów) oraz koniec w węźle nr 1. Jeśli przyjmiemy dla układu lokalnego, że początek jest punktem nr 1, a koniec 2, wówczas:

- ✓ przypadkowi węzła 1-1 odpowiada lokalna numeracja 2-2, co wskazuje na element $k_{22}^{(1)}$ globalnej macierzy sztywności k_1
- ✓ połączeniu węzłów 1-2 odpowiada lokalna numeracja 2-1, co wskazuje na element $k_{21}^{(1)}$ globalnej macierzy sztywności k_1



Przechodząc do węzła nr 2 napisać możemy, że:

- ✓ przypadkowi węzła 2-2 odpowiada lokalna numeracja 1-1, co wskazuje na element $k_{11}^{(1)}$ globalnej macierzy sztywności \mathbf{k}_1
- ✓ dla przypadku połączenia 2-1 odpowiada lokalna numeracja 1-2, co wskazuje na element $k_{12}^{(1)}$ globalnej macierzy sztywności \mathbf{k}_1

Na tej podstawie zbudować możemy teraz globalną macierz \mathbf{K}_1 , umieszczając podmacierze $k_{ij}^{(1)}$ na miejscach odpowiadającym indeksom wyznaczonym przez numery węzłów, jak następuje

$$\mathbf{K}_1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} k_{22}^{(1)} & k_{21}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ k_{12}^{(1)} & k_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie wymiar macierzy \mathbf{K}_1 odpowiada liczbie węzłów (5×5).

Dla elementu nr 2 (poziomy), kolejnym indeksom odpowiadają macierze:

- ✓ 1-1 $\Rightarrow k_{11}^{(2)}$
- ✓ 1-3 $\Rightarrow k_{12}^{(2)}$
- ✓ 3-3 $\Rightarrow k_{22}^{(2)}$
- ✓ 3-1 $\Rightarrow k_{21}^{(2)}$

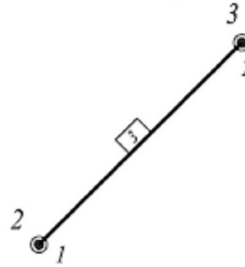


Zatem globalna macierz \mathbf{K}_2 dla elementu nr 2 przyjmuje postać

$$\mathbf{K}_2 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & 0 & k_{12}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{(2)} & 0 & k_{22}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla elementu nr 3 (skośny), kolejnym indeksom odpowiadają macierze:

- ✓ 2-2 $\Rightarrow k_{11}^{(3)}$
- ✓ 2-3 $\Rightarrow k_{12}^{(3)}$
- ✓ 3-3 $\Rightarrow k_{22}^{(3)}$
- ✓ 3-2 $\Rightarrow k_{21}^{(3)}$



Zatem globalna macierz \mathbf{K}_3 dla elementu nr 3 przyjmuje postać

$$\mathbf{K}_3 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & k_{12}^{(3)} & k_{22}^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dla elementu nr 4 (poziomy), kolejnym indeksom odpowiadają macierze:

- ✓ 2-2 $\Rightarrow k_{11}^{(4)}$
- ✓ 2-4 $\Rightarrow k_{12}^{(4)}$
- ✓ 4-4 $\Rightarrow k_{22}^{(4)}$
- ✓ 4-2 $\Rightarrow k_{21}^{(4)}$



Zatem globalna macierz \mathbf{K}_4 dla elementu nr 4 przyjmuje postać

$$\mathbf{K}_4 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^{(4)} & 0 & k_{12}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^{(4)} & 0 & k_{22}^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogicznie tworzymy macierze \mathbf{K}_i dla pozostałych elementów (5 do 7), co zaleca się wykonać samodzielnie.

Wektor przemieszczeń i obciążenia

Przyjmijmy następujące założenia:

- ✓ niech wektor przemieszczeń \mathbf{a} zawiera składowe przemieszczenia w układzie globalnym) każdego z węzłów analizowanego układu,
- ✓ oraz na wektor sił \mathbf{f} niech składają (znane) siły potencjalnie występujących w węzłach.

Powyższe sformułowania zapisać możemy jako

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{3x} \\ a_{3y} \\ a_{4x} \\ a_{4y} \\ a_{5x} \\ a_{5y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ f_{5x} \\ f_{5y} \end{bmatrix}.$$

Warunki brzegowe

Z uwagi na warunki podparcia naszego układu zapisać możemy następujące warunki brzegowe:

- ✓ $a_{2x} = 0$,
- ✓ $a_{2y} = 0$,
- ✓ $a_{4y} = 0$.

Wartości tych jednak nie podstawiamy wprost do wektora przemieszczeń \mathbf{a} , lecz wpisujemy je w odpowiednie miejsca wektora sił \mathbf{f} . W konsekwencji pozwala to zmodyfikować wartości macierzy sztywności \mathbf{K} w taki sposób, że w miejscach przecięcia się wybranych wierszy i kolumn wstawiamy wartość **1**, natomiast pozostałe wartości w tych wierszach i kolumnach **zerujemy**.

Dzięki temu macierz \mathbf{K} staje się macierzą nieosobliwą i możliwe jest wyznaczenie \mathbf{K}^{-1} . Ostateczny wygląd macierzy sztywności \mathbf{K} oraz wektora obciążenia \mathbf{f} pokazany został na kolejnym slajdzie. Zmodyfikowane składniki wyróżniono kolorem **czerwonym**.

Warunki brzegowe

Po uwzględnieniu warunków brzegowych macierz sztywności \mathbf{K} oraz wektor obciążenia \mathbf{f} przyjmą wartość:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ f_{5x} \\ f_{5y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

W ten sposób pozbyliśmy się osobliwości macierzy \mathbf{K} . Przekształcając następnie równanie (1) do postaci

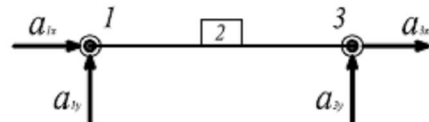
$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f},$$

wyznaczyć możemy nieznanne przemieszczenia węzłów rozpatrywanego układu. Dalej, znając przemieszczenia \mathbf{a} , określić możemy siły wewnętrzne każdego z elementów.

Wyznaczanie sił przekrojowych

Weźmy dla przykładu elementu nr 2, dla którego zapisać możemy równanie $\mathbf{S}_2 = \mathbf{k}_2 \mathbf{V}_2$. Wynika z niego, że:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{3x} \\ a_{3y} \end{bmatrix}$$



Korzystając z równań transformacji (4) lub (5) łatwo możemy przejść do układu lokalnego i wyznaczyć wartości sił przekrojowych \mathbf{Q} oraz \mathbf{N} :

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ N_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_i^T \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ N_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{k}_{2,l} \cdot \mathbf{C}_i^T \cdot \begin{bmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{3x} \\ a_{3y} \end{bmatrix}$$

Tym sposobem dobrnęliśmy do końca przykładu. Z uwagi na ludzką niedoskonałość prezentacja może zawierać pewne błędy numeryczne. Dlatego w trakcie samodzielnej pracy nigdy nie może zabraknąć czujności.